UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Teoría de Funciones

TESIS DOCTORAL

Extensiones al teorema de Egorov

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

José Leandro de María González

Madrid, 2015

José Leandro de María González

EXTENSIONES AL TEOREMA DE EGOROV

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1982

Colección Tesis Doctorales. Nº 156/82

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1982
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-24650-1982

EXTENSIONES AL TEOREMA DE EGOROV

Jose L. de María Gonzalez

Memoria presentada
para obtener el grado de
de Doctor en Matemáticas.

Agradezco al profesor B. Rodriguez-Salinas Palero, director de este trabajo, sus valiosas orientaciones, asi como el tiempo que me ha dedicado.

Tambien quiero agradecer a los compañeros del departamento de Teoría de Funciones sus ayudas y ánimos durante todo el proceso de elaboración de esta memoria.

INDICE

INTRODUCCION

El trabajo que presentamos tiene como idea primordial el estudio de teorema de Egorov. Este tema tiene dos motivaciones. La primera, el escaso estudio que tiene en la literatura, la segunda, la aparición de propiedades semejantes en trabajos actuales sobre integración, por ejemplo en el artículo de Chi (1975) "On the Radon--Nikodym theorem in locally convex spaces" | 3 | y en el de Rodriguez-Salinas (1979) " Integración de funciones definidas en espacios localmente convexos" |31| . De hecho es importante asegurar la convergencia casi uniforme en una sucesión de funciones que originalemtne tiene la casi puntual.

Si se piensa sobre el teorema de Egorov se obtienen gran canitdad de posibles vias de investigación ya que en él intervienen muchos factores. Po r ejemplo influye el espacio de medida, el espacio topológico, la medibilidad de las funciones que consideremos. El panorama se amplía aún más cuando se relacionan diversas topologías.

Por todo esto, hemos tenido que fijarnos en una linea, y atender a las otras cuando se cruzaran de forma natural con la inicial.

Los resultados obtenidos son sobre el tipo de medibilidad. La pregunta que respondemos es en lineas generales: ¿Sobre el espacio topológico (X,T) cumple cierta medibilidad de funciones el teorema de Egorov?. Más explícitamente:

" Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa y (X,T) un espacio topológico. Toda sucesión de funciones "medibles" de Ω a X casi puntualmente convergente a una función f converge casi uniformemente y f es medible en el sentido prefijado.".

En los casos que suponíamos más sencillos, como los espacios métricos y la medibilidad Borel ,observamos que la pregunta era de uan dificultad sorprendente al encontrarnos con problemas aún abiertos de la teoría de conjuntos, como la existencia de cardinales medibles y realmedibles. Una introducción a dicho problema la hemos realizado en el capítulo I por creerlo imprescindible para facilitar la lectura de la memoria y hacer coparticipe al lector de la restricción que impone a algunos resultados la xiomática de conjuntos que se esté dispuesto a utilizar.

De esta forma dedicamos el capítulo I a la exposición casi orientativa de tópicos utiles en el desarrollo de las ideas de los siguientes. Así tratamos de resumir la teoría de las funciones analíticamente representables y los conjuntos absolutamente analíticos, las funciones σ-discretas y los conceptos de peso y π-peso de un espacio topológico.El resumen sólo tiene caracter expositivo por lo que buscamos la forma más directa sin meternos en el desarrollo actual de los temas. Por ejemplo se podría echar en falta los esquemas de Souslin pero esto supondría una dispersión en la finalidad que perseguimos.

En nuestro estudio sobre las medibilidades observamos la existencia de dos tipos claramente distintos: las medibilidades que llamamos de "aproximación" consistentes en definir funciones a partir de clases más sencillas como se hace en la teoría de la integración, y las medibilidades "de imagen inversa" como la Borel. La propiedades más importante de las primeras es que son faciles de manejar, mientras que las segundas sirven de forma eficacisima para la obtención de medidas imagenes, técnica que por otra parte es fundamental en todo el estudio.

Nos hemos visto obligados a relacionar los tipos de medibilidades de aproximación recientemente estudiados por el profesor Rodriguez-Salinas en |31| y las medibilidades de Borel, Baire y uniformente Baire.

En el capítulo II las funciones μ-medibles y $\bar{\mu}$-medibles son caracterizadas de forma análoga al teorema de Pettis, caracterización que ha resultado ser fundamental en toda la memoria. Constatamos la generalidad del concepto de $\bar{\mu}$-medibilidad. Y usando las medidas rígidas de Varadarajan completamos el estudio de la relación a la vez que se obtienen resultados en la linea de Edgar, capítulo V, cuando es un espacio topológico de Banach con la topología débil. El teorema de Egorov se demuestra para la $\bar{\mu}$-medibilidad en espacios LF y para la μ-medibilidad en sumas vectóriales de una familia no numerable de espacios de Frechet, el resultado al que nos venimos refiriendo es el siguiente:

TEOREMA (II.3) : Sea f una función de (Ω , Σ , μ) espacio de medida finita y completa a F espacio localmente convexo. Entonces f es $\bar{\mu}$-medible si y sólo si

3,1 f es μ-esencialmente precompacta Definición II.2

3.2 Para toda seminorma continua p en F y para todo x de E se tiene que $p(f-x)$ es medible.

La condición 3.2. es de por sí, una relación con la medibilidad de tipo clásico porque puede ser traducida como que la función $f:\Omega \longrightarrow E$ cumpla que la imagen inversa mediante f de las bolas de E sean medibles. Este tipo de medibilidad es ampliamente usado por Masani en |26| .

La generalidad de la clase de las funciones $\bar{\mu}$-medible se concreta en la siguiente:

PROPOSICION (II.5) : Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa y E un espacio localmente convexo. Si f es una función de Ω a E que es límite casi puntual de una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones $\bar{\mu}$-medibles, entonces f es $\bar{\mu}$-medible.

A partir de estos dos resultados se obtienen los Teoremas de Egorov anteriormente citados.

Finaliza el capítulo con la obtención de las propiedades de las funciones $\bar{\mu}$-medibles en espacios LF. De forma directa se obtiene que las funciones μ-medibles, $\bar{\mu}$-medibles coinciden en un espacio LF. Aplicando las técnicas de medidas rígidas (definición II.13) entonces se demuestra que

PROPOSICION (Corolario de la proposición II.15) : Sea E un espacio LF y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa. Si μ_f es una medida en la σ-álgebra de Baire de E tal que es imagen de una función $f:\Omega \longrightarrow E$, entonces μ_f es rígida si y sólo si f es $\bar{\mu}$-medible.

El capítulo III se ha empleado en relacionar la $\bar{\mu}$-medibilidad y la medibilidad Borel. La primera parte se dedica en concreto a los espacios localmente convexos metrizables. Aquí hemos dado una equiva lencia al Teorema Marczewski-Sikoski (1948) obteniendo el siguiente Teorema

TEOREMA (III.5) : Sea E un espacio localmente convexo metrizable, son equivalentes:

a) El peso de E es de medida cero.

b) Para todo espacio de medida finita y completa (Ω, Σ, μ) se cumple

$$\Gamma_{Borel}(\Omega, E) = M(\Sigma, \mu, E)$$

(denotando por $M(\Sigma, \mu, E)$ el conjunto de las funciones μ-medibles de en E)

c) Para toda medida de Borel finita en E se tiene una descomposición de tipo Marczewski. (Ver nota siguiente a la proposición III.3).

Con este Teorema caracterizamos las funciones medibles Borel mediante la estructura más operativa de las funciones μ-medibles, abriendo el camino para aplicarlas a las técnicas de integración. La aparente restricción sobre el peso de E es más de tipo lógico que de tipo analítico, según hemos pretendido sugerir en el capítulo I. El problema de la existencia de los cardinales de medida cero (y por consiguiente los cardinales no medibles) depende de la axiomática de conjuntos empleada. Admitiendo la hipótesis del continuo, los Teoremas de Ulam permiten asegurar que el tamaño de tales cardinales es tan grande que en casos concretos no se verá alcanzado.

La segunda parte del capítulo, a partir de la proposición III.6, se dedica a completar en un cuadro y a generalizar el Teorema de Marczewski-Sikoski para el caso LF, obteniendo en el Teorema III.11 el análogo al caso métrico aunque con la diferencia de que las funciones medibles Borel coinciden en este caso con una subclase de las funciones μ-medibles que llamamos μ^*-medibles.

En las demostraciones se ha usado un lema sobre el peso de un espacio LF que es el siguiente

LEMA (III.10) : Sea E un espacio LF. E tiene peso de medida cero si y sólo si el peso de cada uno de los espacios de la sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ que definen la topología E es de medida cero.

Acaba el capítulo con un comentario sobre un trabajo de Fremlin (1975) a propósito de la sumabilidad de dos funciones medibles Borel en un espacio métrico.

Señalemos que el problema del mantenimiento del carácter de Borel mediante la suma de funciones es planteado por A. H. Stone (|38| 1973) y que nosotros obtenemos el Teorema 1 de dicho trabajo como corolario del Teorema III.5, en el caso vectorial, y que se obtiene fácilmente del Teorema III.13., también como corolario, un resultado más general en el caso LF.

Alrededor de las ideas de A. H. Stone hay trabajos relativamente recientes (1975-79) de Hausell, Preiss, y otros. (De estos trabajos comentaremos en esta introducción y a lo largo de la memoria).

En el capítulo IV nos planteamos los dos problemas que surgen en la obtención del Teorema de Egorov para las funciones medibles Borel de un espacio de medida finita y completa (Ω, Σ, μ) a un grupo topológico conmutativo:

1. En qué condiciones el límite casi puntual de una sucesión de funciones medible Borel es medible Borel.
2. En qué condiciones la suma de dos funciones medible Borel es medible Borel.

Iniciamos el capítulo con un resumen de resultados en relación con estas dos cuestiones.

Se han clasificado nuestros resultados en tres apartados. El primero consta de un estudio, sobre espacios topológicos, de la primera cuestión. En la definición IV.3 se definen los espacios de clase F_α, α número transfinito, de forma que engloban a los espacios LF y a los espacios de Banach de dual separable con la topología débil. De esta forma el resultado más general es el siguiente

PROPOSICION (IV.4) : Sea f una función de un espacio de medida completa (Ω, Σ, μ) a un espacio topológico E tal que es el límite puntual de una sucesión de funciones medibles Borel $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Si E es de clase F_α entonces f es medible Borel.

Para el estudio del problema de la suma, definimos en IV.9. una clase de grupos topológicos abelianos y resolvemos el problema para la clase de funciones esencialmente separables, según la proposición IV.11.

PROPOSICION (IV.11) : Sea E un grupo topológico de clase C_α y sean f y g dos funciones esencialmente separables de Borel de un espacio de medida finita y completa a E. Entonces f+g es medible Borel.

La exigencia de la separabilidad esencial no es superflua puesto que al final del capítulo III se hace referencia a un contraejemplo de Fremlin, en el cual se dan dos funciones f, g en un espacio de Banach que son medibles Borel y su suma no es medible Borel.

Con estos resultados obtenemos el Teorema de Egorov para la medibilidad Borel de funciones esencialmente separables en grupos abelianos de clase C_α .

En el segundo apartado quitamos la hipótesis de separabilidad esencial introduciendo una nueva hipótesis sobre el cardinal del conjunto que soporta a la σ-álgebra o el $*$-peso del espacio topológico:

TEOREMA (IV.16) : Sea E un grupo conmutativo de clase C_α y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa. Si el $*$-peso de E o el cardinal de 2^Ω es de medida cero entonces la suma de dos funciones medibles Borel es medible Borel.

El apartado tercero se dedica a eliminar la hipótesis de cardinalidad en dos sentidos, el primero suponer el espacio de medida absolutamente analítico de forma que mediante la utilización de sendos Teoremas de Preiss, Fremlin, [29] nos sale de forma casi inmediata el siguiente Teorema:

TEOREMA (IV.19) : Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finita, donde X es absolutamente analítico y $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel en X. Sea E un grupo conmutativo metrizable, y $(f_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones medible Borel de X en E, puntualmente convergente a una función f. Entonces f es medible Borel y la convergencia es casi uniforme.

El segundo sentido prescinde de la analiticidad de X, restringiendo un poco las clases de funciones, usando las funciones de Banach analíticamente representables que introducimos en el capítulo I y que estudia Hansell en [14] y [15].

En el capítulo V se aplican los resultados del apartado anterior al estudio del Teorema de Egorov y sus dos cuestiones subyacentes para funciones definidas de (Ω, Σ, μ) a $(E, \sigma(E, E'))$ y a $(E, bw(E))$ siendo E un espacio de Banach. Por la dificultad de trabajar con varias topologías hemos usado una notación un poco más específica que consiste en añadir al nombre de la medibilidad la topolo gía, poe ejemplo si la función es μ-medible de Ω en $(E, \sigma(E',E))$ la llamaremos μ- $\sigma(E,E')$-medible.

El primer resultado obtenido es

PROPOSICION(V.1) : Sea E un espacio de Banach con E' separable. (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa. Entonces el conjunto de las funciones medibles Borel de Ω en $(E,\sigma(E,E'))$ es cerrado para la convergencia casi puntual y además cumple el Teorema de Egorov.

Mejoramos el resultado con el Teorema de Stegall 37 :

PROPOSICION(V.2) Sea E un espacio de Banach tal que E' tiene P.R.N. Entonces el conjunto de las funciones medibles Borel de (Ω, Σ, μ) a (E,σ) que son esencialemte separables es cerrado para la $\sigma(E,E')$-convergencia casipuntual y además cumple el Teorema de Egorov.

El teorema de mayor interés , a nuestro juicio, se obtiene con la topologia bw(E).

TEOREMA (V.5) : Sea E un espacio de Banach tal que E' tiene P.R.N. Entonces el conjunto de las funciones $\sigma(E,E')$-medibles Borel esencialmente separables cumplen el teorema de Egorov cuando consideramos la bw(E)-convergencia casi uniforme.

A continuación volvemos a relacionar los diversos tipos de meidbilidades, y es aquí donde las medidas rígidas juegan el papel principal al caracterizar a las funciones esacalarmente medibles que son debilmente equivalentes a las funciones μ-$\|.\|$-medibles, con los cuales para la clase de los espacios de Banach medibles compactos tenemos que las funciones μ-$\sigma(E,E')$-meidbles son precisamente las funciones débilmente equivalentes a una función μ-$\|\;\|$-medibles. Y damos una caracterización de los medibles compactos usando sólo espacios de medida finita y completa.

Obtenemos para finalizar algúnos resultados análogos para duales de espacios de Banach separables con la topología $\sigma(E',E)$

El apéndice tiene un contenido distinto a los últimos capítulos puesto que en él estudiamos un tipo de medibilidad muy general, la $\mathcal{H}$-medibilidad, de forma que engloba a las medibilidades clásicas. Las preguntas que respondemos son concernientes a la convergencia casi puntual de sucesiones y casi uniforme de redes. No obstante al final hemos obtenido un Teorema de Egorov en condiciones bastantes restringidas dada la amplitud del concepto de $\mathcal{H}$-medibilidad.

CAPITULO I .

PRELIMINARES

A manera de introducción a los "cardinales grandes" vamos a dar las definiciones imprescindibles y los resultados fundamentales para vislumbrar la generalidad de los teoremas del capítulo III. Una teoría elemental pero bastante desarrollada se encuentra en los libros de Kuratowski |21| y de Levy |23|. En la notación seguimos a |23|

El concepto de número cardinal se encuentra en la obra de Bolzano (1851) , pero es Cantor quien en 1878 define el cardinal de un conjunto M como el conjunto de todos los conjuntos equipotentes a M. Esta definición resulta poco práctica por lo que el mismo Cantor en 1883 la basa en otro concepto, el de número ordinal: " los números ordinales son los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados", entonces , "El cardinal de M, si M es un conjunto biem ordenado, es el menor ordinal equipotente a M".

Definición 1: El cardinal $\mathfrak{m}$ es debilmente inaccesible si y sólo si

i) Si $\mathfrak{n}<\mathfrak{m}$ entonces existe $\mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{n}<\mathfrak{p}<\mathfrak{m}$.

ii) Si la suma con índice menor que $\mathfrak{m}$ de conjuntos de cardinal menor que $\mathfrak{m}$ es menor que $\mathfrak{m}$, esto es,

Dado $\{A_i\}_{i\in I}$ tal que $Cd(I)<\mathfrak{m}$ y $Cd(A_i)<\mathfrak{m}$ para todo i, entonces $\sum_{I} Cd(A_i) < \mathfrak{m}$.

Definición 2: El cardinal $\mathfrak{m}$ es fuertemente inaccesible o inaccesible si

i) $\mathfrak{m}$ es debilmente inaccesible.

ii) Si $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ entonces $2^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{m}$.

La noción de cardinal fuertemente inaccesible fuê introducida simultameamente por Traski y Zermelo.

Definición 3: Un cardinal se dice real medible si $\mathfrak{a} > \aleph_0$ y hay una medida contablemente aditiva en P(A) para algûn A de cardinal tal que se anula sobre los unitarios y es distinta de la trivial.

Si un cardinal $\mathfrak{a}$ no es realmedible se dice que es de medida cero.

Un cardinal $\mathfrak{a}$ se dice medible si $\mathfrak{a} > \aleph_0$ y hay una medida contablemente aditiva dos-valuada (es decir, que sólo toma valores 0 y 1) en P(A) para algûn A de cardinal $\mathfrak{a}$ tal que se anula sobre los unitarios y es distinta de la trivial.

Definición 4: Una medida μ en P(X) se dice $\mathfrak{m}$-aditiva si para cada familia $\{A_i\}_{i \in I}$ con $Cd(I) < \mathfrak{m}$, de conjuntos disjuntos se tiene que $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$.

Por tanto contablemente aditiva es sinónimo de $\aleph_1$-aditiva.

Proposición 5: Si una medida μ en P(X) se anula sobre los unitarios y es $\mathfrak{m}$-aditiva , entonces para todo subconjunto Y de X con $Cd(Y) < \mathfrak{m}$ se tiene que $\mu(Y)=0$.

DEMOSTRACION: Es inmediata. $\ast$

Teorema 6: i) Si κ es el menor aleph de medida cero entonces cada medida contablemente aditiva en P(κ) anulandose sobre los unitarios es κ-aditiva.

ii) Si κ es el menor aleph no medible entonces cada medida contablemente aditiva dos-valuada definida en P(κ) anulandose sobre los unitarios es κ-aditiva.

DEMOSTRACION: Ver |23; IX 4,2|

Nuestro interés es ver qué tan grandes son los cardinales medibles y real medibles. Este tamaño es relativo a la axiomática de conjuntos elegida.Es un hecho conocido aunque su demostración no es trivial la siguiente demostración de Banach (1930);

Proposición 7: Todo cardinal realmedible es regular y es un cardinal límite.

DEMOSTRACION: Ver |23 IX 4.13 y 4.14.| En la demostración se usa el axioma de elección.

Esta proposición nos permite asegurar que en ZFC no se puede probar la existencia de cardinales realmedibles,ya que no se puede probar que existen cardinales débilmente inaccesibles y según lo anterior todo cardinal real medible es débilmente inaccesible.

Teorema 8: (Ulam 1930) Todo cardinal real medible o es menor o igual que $2^{\aleph_0}$ o es medible.

DEMOSTRACION: Ver |23 IX 4.18|

Por tanto suponiendo la hipótesis del continuo, todo cardinal realmedible es medible ya que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ que no es un cardinal límite. Por tanto en la axiomática de Godel-Von Neuman no existen cardinales realmedibles ni medibles.

Los siguientes resultados que exponemos van encaminados a demostrar que el tamaño de los cardinales medibles es muy grande.

Teorema 9 (Ulam 1930): Todo cardinal medible es inaccesible.
DEMOSTRACION: Ver |23 IX 4.18|

Teorema 10 (Tarski) El primer cardinal inaccesible es no medible.
DEMOSTRACION |Ver 21 IX 4.1|

En 1971 Solovay ha probado un hecho sorprendente en esta teoría:
Teorema 11(Solovay) : "ZFC + cardinal medible " es equiconsistente con "ZFC+ cardinal realmedible"
DEMOSTRACION : Ver|21. IX|

En este apartado estudiamos dos conceptos topológicos que han resultado ser útiles a lo largo de la memoria. Los relacionaremos con los resultados anteriores.

Definición 12 : Dado un espacio topológico (X,T) se llama peso de (X,T) al menor cardinal tal que existe un conjunto Y denso en X con dicho cardinal.

El $*$-peso de (X,T) es el más pequeño cardinal tal que existe una base de T con dicho cardinal.

Proposición 13: El peso de (X,T) es menor o igual que el $*$-peso de (X,T).

DEMOSTRACION: Es inmediata ya que dada una base $(B_i)_{i\in I}$ de la topología T existe un conjunto denso con dicho cardinal. Basta con coger un elemento x_i de cada B_i. #

Proposición 14: Si X_o es denso en (X,T), tenemos que

$$\overline{U} = \overline{U \cap X_o}$$

para cada abierto U de X.

DEMOSTRACION: Para cada x de $\overline{U}$ y para cada V^x, el conjunto $V^x \cap U$ es no vacio y abierto en X. Entonces $V^x \cap U \cap X_o \neq \emptyset$ y x pertenece a $\overline{U \cap X_o}$.

Así hemos probado que

$$\overline{U} \subset \overline{U \cap X_o}$$

y la otra implicación es obvia. #

Proposición 15: Dado un espacio regular (X,T) si el peso de (X,T)

es $\mathfrak{m}$, entonces el $*$-peso de (X,T) es menor o igual que $2^{\mathfrak{m}}$.

DEMOSTRACION: Sea X_o un conjunto denso en (X,T) con cardinal $\mathfrak{m}$.

Sea $(A_i)_{i\in I}$ una base del espacio X y sea

$$B_i = \mathrm{Int}\,\overline{(A_i \cap X_o)}.$$

Por la proposición 14 , se tiene

$$A_i \subset \mathrm{Int}\,\overline{(A_i \cap X_o)} \subset \overline{A}_i$$

y puesto que el espacio es regular $(B_i)_{i\in I}$ es tambien una base. Pero el número de $(B_i)_{i\in I}$ no excede $P(X_o)$, y el cardinal de la nueva base es menor o igual que $2^{\mathfrak{m}}$. #

Esta proposición es suficiente para nuestros propósitos porque los espacios en que trabajamos son regulares.

El peso de un espacio topológico tiene una propiedad "mala" y es que no tiene porqué ser menor o igual para los subespacios de un espacio dado.

EJEMPLO: Si en $\mathbb{R}$ tomamos la siguiente topología

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} \quad 0 \in A\} \cup \{\emptyset\} ,$$

el peso de $(\mathbb{R},\mathcal{T})$ es 1. Pero el peso de $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}})$ es $\mathfrak{c}$.

Varios lemas del capítulo IV van orientados a segurar que se conserve el peso.

Proposición 16: Si (X,T) es metrizable entonces el peso de (X,T) es igual al $*$-peso de (X,T).

DEMOSTRACION: Ver |25| #

II.

Sería pretencioso por nuestra parte pretender hacer un resumen a la vez corto y profundo de la teoría de los conjuntos analíticos y de las funciones σ-discretas. Para ello remitimos al lector a los extensos trabajos de Hansell |14| y |15| . No obstante exponemos unos preliminares, omitiendo a proposito los resultados de Christensem que a pesar de dar la visión más moderna de los primeros, haría tediosa la lectura.

Definición 1 : Sea X un espacio topológico y supongamos que cada sucesión $(n_1,\ldots,n_p)$ de números naturales corresponde un subconjunto $F_{n_1,\ldots,n_p}$ cerrado en X.

Entonces el conjunto

$$A=\bigcup_{(n_p)}\bigcap_{p=1}^{\infty} F_{n_1,\ldots,n_p}$$

donde la unión se toma sobre todas las sucesiones (n_p) de números naturales , es llamado un conjunto analítico.

El siguiente lema nos muestra que los conjuntos analíticos son regularizables.

Lema 2: A cada conjunto analítico A en X podemos asociar una familia $(A_{n_1,\ldots,n_p})$ de comnjuntos analíticos en X indicados por las sucesiones finitas de números naturales talwes que:

1) $A=A_1\cup A_2\cup\ldots$

2) $A_{n_1,\ldots,n_p}=A_{n_1,\ldots,n_p,1}\cup A_{n_1,\ldots,n_p,2}\cup\ldots$

3) $A=\bigcup_{(n_p)}\bigcap_{p=1}^{\infty}\overline{A_{n1,\ldots,n_p}}$.

DEMOSTRACION: Ver |14 , lema1|

Definición 2 : Un subconjunto A de un espacio topológico (X,T) se dice absolutamente analítico si es homeomorfo a un conjunto analítico en un espacio métrico completo.

El espacio medible formado por un conjunto absolutamente analítico X y la σ-álgebra de Borel de X tiene una importante propiedad:

Teorema 3: Supongamos que f,g son dos funciones de Borel de clase acotada de (X,B) en un grupo métrico conmutativo Y, entonces $f+g$ es medible Borel.

DEMOSTRACION: Se desprende de forma inmediata de |38 teorema3| y de que la suma es una aplicación continua. #

En la década de los setenta se han estudiado estas propiedades de forma exhaustiva. Iremos dando cuenta de los resultados conforme vengan siendo necesarios.

Utilizando el concepto de función σ-discreta introducido por Hansell en 1971 |15| podremos eliminar hipótesis de analiticidad en los teremas de Egorov del capítulo IV.

Dado un espacio topológico X, y un espacio métrico Y, la clase de las funciones analíticamente representables es la más pequeña familia de funciones de X en Y conteniendo a las funciones continuas y cerrada respecto a los límites puntuales de sucesiones de funciones en ella.

Clasificamos dicha familia en grupos Φ_α $(0 \leq \alpha < \omega_1)$ donde ω_1 es el primer ordinal no numerable, definiendo:

Φ_0 es la familia de aplicaciones continuas de X en Y

Φ_α es la familia de todos los límites de sucesiones puntualmente convergentes de aplicaciones de $\bigcup_{\beta<\alpha} \Phi_\beta$, ($\alpha>0$).

A efectos de que la clase de los conjuntos de Borel sean tambien facilmente clasificalbes , y cuando estemos usando las funciones analíticamente representables, exigiremos a los espacios topológicos que los abiertos sean F_σ . Los espacios metrizables y perfectamente normales cumplen esta propiedad.

Definición 4: Sea (X,T) un espacio topólogico. Una familia de conjuntos es discreta (relativamente a X) si X puede ser cubierta por abiertos cada uno teniendo una intersección no vacía con a lo más un miembro de dicha familia.

Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es completamente discreta si existe una colección de abiertos (U_B) en X tal que $B \subset U_B$ para todo B de $\mathcal{B}$.

Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un espacio X es base de una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ si para cada abierto $G \subset Y$, $f^{-1}(G)$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Definición 5: Una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ se dice σ-discreta si tiene una base $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ donde cada $\mathcal{B}_n$ es completamente discreta.

La clase de las funciones σ-discretas es muy amplia ya que toda aplicación cuyo rango sea II.A.N. es σ-discreta, y tambien lo es una aplicación continua cuyo dominio o rango es metrizable.

El trabajo fundamental de Hansell es probar que toda aplicación de Borel de un espacio absolutamente analítico en un espacio métrico es σ-discreta. (ver |14|).

Pero los trabajos anteriormente citados utilizan una clase de funciones introducida por Banach en 1931

Φ_1^* es la familia de las funciones de Borel de clase 1.

Φ_α^* es la familia de las funciones que son límite puntual de sucesiones de funciones de $\bigcup_{\beta<\alpha} \Phi_\beta^*$, $\alpha > 1$, $\alpha < \omega_1$.

Los teoremas sobre esta familia se citan inmediatamente antes de su uso en el capítulo IV.

Para finalizar con estos preliminares fijaremos la notación.

Dados un espacio medible (Ω, Σ) y un espacio topológico (X, T) diremos que una función es medible Borel si para todo abierto A de X, $f^{-1}(A)$ pertenece a Σ.

Una función $f: \Omega \longrightarrow X$ es medible Baire si su composición con toda función continua de X en R es medible Borel.

Si (X,T) está dotado de una uniformidad, se dice que una función de Ω a X es medible uniformemente Baire si la composición con toda función uniformemente continua de X en R es medible Borel.

Llamaremos

$$F_{Borel}(\Omega, \Sigma) = \{ f:\Omega \longrightarrow X \ ; \ f \text{ es medible Borel} \}$$

$$F_{Baire}(\Omega, \Sigma) = \{ f:\Omega \longrightarrow X \ : \ f \text{ es medible Baire} \}$$

$$F_{U.Baire}(\Omega, \Sigma) = \{ f:\Omega \longrightarrow X : f \text{ es medible unif. Baire} \}.$$

Si fuera necesario pondremos detrás de la X la topología , por ejemplo $\Gamma_{Baire}(\Omega,(X,T))$. Y si se sobreentienden tanto el espacio de medida como el topológico se pondrá Γ_{Baire}.

CAPITULO II

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MEDIBLES Y LAS μ-MEDIBLES

En éste capítulo vamos a relacionar las medibilidades en el sentido de imágenes inversas y las medibilidades de aproximación en espacios localmente convexos. Comenzaremos por definir éstos últimos según los trabajos del Profesor Rodríguez-Salinas en los cuales generaliza y amplía las clases de dichas funciones para posteriormente aplicarlos a una teoría de integración, el Teorema de Radon Nikodym y las martingalas.

DEFINICION 0.- Sea Σ una σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y E un espacio vectorial topológico localmente convexo sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Supondremos que los espacios topológicos son siempre separados.

Una función $f : \Omega \to E$ se dice simple de clase 0, y lo denotamos por $f \in S_o(\Sigma,E) = S_o$, si es una función Σ-medible con un número finito de valores, es decir, es

$$f = \Sigma_1^n \; y_i \chi_{\Delta_i}$$

con y_i de E y Δ_i de Σ para $i=1,\dots,n$ donde χ_{Δ_i} es la función característica de Δ_i.

Una función $f : \Omega \to E$ se dice simple, y lo denotamos por $f \in S = S(\Sigma,E)$ si es el límite uniforme de una red $(f_i)_{i \in I}$ de funciones de S_o.

Supongamos que el espacio medible (Ω,Σ) tenemos definida una medida positiva μ, y que $\mu(\Omega) < +\infty$.

Una función $f : \Omega \rightarrow E$ se dice <u>μ-medible</u> y se escribe $f \in M = M(\Sigma,\mu,E)$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe K_ε de Σ tal que $\mu(\Omega \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ y $f\chi_{K_\varepsilon}$ es simple.

Una función $f : \Omega \rightarrow E$ se dice <u>$\bar{\mu}$-medible</u> si es el límite uniforme de una red de funciones μ-medibles, esto es, si pertenece a la clausura $\bar{M} = \bar{\mu}(\Sigma,\mu,E)$ de $M(\Sigma,\mu,E)$ para la topología de la convergencia uniforme.

Gilliam |11| demuestra que si el espacio es metrizable $M = \bar{M}$, y da un ejemplo de un espacio no metrizable en el cual M no coincide con $\bar{M}$.

En |31| se caracterizan las funciones simples por su imagen y por una condición de medibilidad en la forma siguiente, una función de Ω en E es simple y solamente si $f(\Omega)$ es precompacto y para toda seminorma continua p en E y todo x de E la función escalar $p \circ (f-x)$ es medible, esta condición última es más débil que la medibilidad Borel, y nos indica que f es medible de la σ-álgebra Σ a la σ-álgebra definida en E, y que está generada por los entornos convexos en E, |26|. Este tipo de medibilidad se estudia en éste artículo.

Vamos a caracterizar de forma análoga las funciones μ-medibles u $\bar{\mu}$-medibles, para lo cual introducimos dos nuevas definiciones referentes a las funciones.

<u>Definición 1</u>: Sea f una aplicación de (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita en E e.l.c. Se dice que f es esencialmente ω-precompacta

si para todo entorno V de cero en E, existe un subconjunto de Ω, Z_V de medida nula, y un conjunto contable $M \subset$ tal que

$$f(\Omega \setminus Z_V) \subset M + V$$

<u>Definición 2</u>: En las condiciones de la definición 1, se dice que f es esencialmente σ-precompacto si existe un subconjunto Z de Ω de medida nula tal que

$$f(\Omega \setminus Z) = \bigcup_{n=1} P_n$$

con $P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \ldots$ precompactos.

El siguiente teorema es esencial a lo largo de toda la memoria y dá un criterio sencillo y sobre todo útil para saber si una función es $\bar{\mu}$-medible.

<u>Teorema 3</u>: Sea f una función de (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita y completa a E e.l.c. Entonces f es $\bar{\mu}$-medible si y sólo si

3.1. f es esencialmente ω-precompacta

3.2. Para toda seminorma continua en E y para todo x de E se tiene que $p(f-x)$ es medible.

DEMOSTRACION: <u>$\Longrightarrow$</u>

3.1. Sea f una función $\bar{\mu}$-medible, entonces existe una red de funciones μ-medibles $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ tal que converge uniformemente a f.

Si tomamos un entorno V absolutamente convexo de 0 en E, existe $\alpha_o \in \Lambda$ tal que si $\alpha \geq \alpha_o$ y para todo $t \in \Omega$,

$$f(t) - f_\alpha(t) \in \frac{1}{2} V. \tag{1}$$

Fijemos $\alpha \geq \alpha_o$, por ser $f_\alpha(t)$ μ-medible existe una sucesión de conjuntos disjuntos $(K_n)_{n=1}^{\infty}$, |31|, y medibles tales que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_n K_n) = 0$, que cumple

$$f_\alpha = \Sigma_1^{\infty} \; f_\alpha \, \chi_{K_n} + f_\alpha \, \chi_Z$$

donde $Z = \Omega \setminus \bigcup_n K_n$, y $f_\alpha \, \chi_{K_n}$ es una función simple, y por tanto $f_\alpha(K_n)$ es precompacto, entonces existe un conjunto finito F_n tal que

$$f_\alpha(K_n) \subset F_n + \frac{1}{2} V.$$

Si t pertenece a $\Omega \setminus Z$

$$f_\alpha(t) \setminus \in \bigcup_n f_\alpha(K_n) \subset \bigcup_n (F_n + \frac{1}{2} V) = (\bigcup_n F_n) + \frac{1}{2} V,$$

el conjunto $M = \bigcup_n F_n$ es contable y por (1)

$$f(\Omega \setminus Z) \subset f_\alpha(\Omega \setminus Z) + \frac{1}{2} V \subset M + \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V = M + V.$$

3.2. Dada una seminorma contínua p en E, y un elemento x de E, la red $f_\alpha - x$ converge uniformemente a $f-x$, como toda semi̲norma continua en E es uniformemente continua tenemos que $p(f_\alpha - x)$ converge uniformemente a $p(f-x)$, entonces $p(f-x)$ es medible.

$\underline{\Leftarrow|}$ Sea f una función de Ω en E cumpliendo 3.1 y 3.2.

Sea V un entorno de 0 absolutamente convexo y cerrado, p su funcional de Minkowski, entonces existe un conjunto Z de medida nula y un conjunto contable $M = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$f(\Omega \setminus Z) \subset M + V.$$

Existe una partición $(\Delta_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\Omega \setminus Z$ en Σ tal que

$$f(t) - x_n \in V \quad \text{para todo } t \text{ de } \Delta_n$$

y la función

$$f_p = \Sigma_1^\infty x_n \chi_{\Delta_n} + f \chi_Z$$

es μ-medible y verifica

$$p(f(t) - f_p(t)) \leq 1 \quad \text{para todo } t \text{ de } \Omega$$

luego $(f_p)_p$ es una red de funciones μ-medibles que converge uniformemente a f, es decir, f es $\bar{\mu}$-medible. (El orden de la red (f_p) es el orden natural de las seminormas, es decir el de los entornos de cero en E).#

Proposición 4: Sea f una función de (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita y completa a E e.l.c. Entonces f es μ-medible si y sólo si

4.1. Existe un conjunto Z en Ω tal que $\mu(Z) = 0$ y una sucesión de conjuntos precompactos $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ en E tales que

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \bigcup_n P_n$$

de forma que para todo $\varepsilon > 0$ exista n_o tal que $\mu^*(\Omega \setminus f^{-1}(P_{n_o})) < \varepsilon$.

4.2. Para toda seminorma continua p en E y todo x de E la función escalar $p(f-x)$ es medible.

DEMOSTRACION: $\Leftarrow$ Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe P_{n_o} tal que

$$\mu^*(\Omega \setminus f^{-1}(P_{n_o})) < \varepsilon/2,$$

por la definición de medida exterior asociada a μ, existe K_{n_o} medible tal que $\mu(K_{n_o}) < \varepsilon$ y $K_{n_o} \supset \Omega \setminus f^{-1}(P_{n_o})$, luego $\Omega \setminus K_{n_o} \subset f^{-1}(P_{n_o})$, por tanto,

$$f(\Omega \setminus K_{n_o}) \subset P_{n_o}.$$

Como P_n es precompacto, $f(\Omega \setminus K_{n_o})$ es precompacto y

$$\mu(K'_{n_o}) < \varepsilon .$$

Por la condición 4.2 y

$$f\, \chi^{c}_{K_{n_o}}(\Omega) \subset P_{n_o} \cup \{0\}$$

tenemos que f es μ-medible, ya que $P_{n_o} \cup \{0\}$ es precompacto.

$\Longrightarrow$| 4.1. Si suponemos que la aplicación es μ-medible, entonces existe una sucesión de conjuntos disjuntos de medida positiva $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $f.\chi_{K_n}$ es simple y f admite la expresión

$$f = \Sigma_1^{\infty} f.\chi_{K_n}' + f\, \chi_Z \quad \text{con} \quad \mu(Z) \leq 0 .$$

Como $f.\chi_{K_n}$ es simple entonces $f(K_n)$ es precompacto.

Sea

$$K'_n = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

y

$$P_n = f(K'_n) \quad .$$

que son precompactos y $P_1 \subset P_2 \subset \ldots.$

Dado $\varepsilon > 0$ existe n tal que $\mu(\Omega \setminus K'_n) < \varepsilon$ y

$$\Omega \setminus f^{-1}(P_n) \subset \Omega \setminus K'_n$$

por tanto

$$\mu^*(\Omega \setminus f^{-1}(P_n)) < \mu^*(\Omega \setminus K'_n) = \mu(\Omega \setminus K'_n) < \varepsilon$$

4.2. Para toda seminorma continua p en E y cada x de E, $p \circ (f-x)$ es medible ya que f es el límite casi puntual de una sucesión de funciones simples, entonces $f-x$ será también límite casi - puntual de una sucesión de funciones simples y por tanto $p(f-x)$ será el límite casi puntual de una sucesión de funciones medibles Borel de Ω en K, como (Ω,Σ,μ) es completo $p(f-x)$ será medible.#

Un problema planteado alrededor de las funciones $\overline{\mu}$-medibles es si la clase de dichas funciones era cerrada frente al límite casi puntual de sucesiones en la proposición y corolario siguientes volvemos dicho problema de forma elegante gracias a la aplicación del Teorema 3.

<u>Proposición 5</u>: Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa, E un espacio localmente convexo. Si f es una función de Ω a E que es límite puntual de una sucesión de funciones $\overline{\mu}$-medibles $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces f es $\overline{\mu}$-medible.

DEMOSTRACION: Como $f(t) = \lim f_n(t)$ para todo $t \in \Omega$, entonces dado un entorno U absolutamente convexo de 0, y dado $t \in \Omega$, existe n_o tal que

$$f(t) \in f_n(t) + \frac{1}{2} U$$

para todo $n \geq n_o$.

Por ser f_n una función $\overline{\mu}$-medible tenemos que para todo U entorno de cero existe un conjunto Z_n medible en Ω tal que $\mu(Z_n)=0$ y $f_n(\Omega \setminus Z_n)$ es ω-precompacto, es decir, existe M_n contable de forma que

$$f_n(\Omega \setminus Z_n) \subset M_n + U/2$$

si tomamos

$$Z = \bigcup_n Z_n \quad \text{y} \quad M = \bigcup_n M_n$$

resulta que $\mu(Z) = 0$ y M es contable, y además

$$f(\Omega \setminus Z) \subset M + \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} U \subset M + U$$

luego $f(\Omega \setminus Z)$ es ω-precompacto y cumple la propiedad 3.1.

Dada una seminorma p contínua en E y x elemento de E, $p \circ (f-x)$ es medible ya que

$$p(f-x) = \lim_n p(f_n-x)$$

puntualmente en Ω y cada $p \circ (f_n-x)$ es medible en Ω en $\mathbb{R}$, luego f también cumple la propiedad 3.2. Por tanto f es $\bar{\mu}$-medible.#

Corolario: En las condiciones de la proposición, el límite casi puntual de una sucesión de funciones $\bar{\mu}$-medibles es $\bar{\mu}$-medibles.

DEMOSTRACION: Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión de funciones $\bar{\mu}$-medibles que converge a f casi puntualmente, existe un conjunto Z de medida nula en el complementario del cual la sucesión converge a f puntualmente, por tanto f es $\bar{\mu}$-medible de Ω Z a E.

Luego existe una red $(g_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de funciones μ-medibles de $\Omega \setminus Z$ a E tales que converge a $f|_{\Omega \setminus Z}$ uniformemente. Si definimos

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} g_\alpha(t) & \text{si} \quad t \in \Omega \setminus Z \\ f(t) & \text{si} \quad t \in Z \end{cases}$$

es facil comprobar que G_α es μ-medible de Ω a E, y la red $(G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge a f uniformemente, luego f es $\bar{\mu}$-medible.#

Como hemos dicho, la memoria tiene como finalidad obtener condiciones sobre el espacio para que se pueda aplicar el Teorema de Egorov clásico.

Con esta medibilidad de aproximación se cumple un teorema de Egorov en el sentido siguiente:

Teorema 6: Sea E un espacio localmente convexo metrizable y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa. Sea (f_n) una sucesión de fun ciones $\overline{\mu}$-medibles de Ω en E que converge a f en casi todo punto de Ω. Entonces f_n converge casi uniformemente a f.

DEMOSTRACION: Sin perder generalidad podemos suponer la convergencia en todo Ω.

Como el espacio es metrizable existe una familia numerable de seminormas $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ que define la topología de E.

Como $\overline{M}(\Sigma,\mu,E)$ es un espacio vectorial es equivalente que la sucesión (f_n) converja a f_n puntualmente y que f_n-f converja puntualmente a cero. Dado una serminorma p_m, la sucesión de funciones escalares $p_m(f_n-f)$ converge a cero cuando n tiende a infinito, y por el Teorema de Egorov para el caso real dado que $p_m(f_n-f)$ es una función medible Borel de Ω a R tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto Z_m tal que $\mu(Z_m) \leq \varepsilon/2^m$ y

$$\lim_n p_m(f_n - f) = 0$$

uniformemente sobre $\Omega \setminus Z_m$.

Si tomamos

$$Z = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m$$

entonces $\mu(Z) \leq \varepsilon$.

Vamos a comprobar que f_n converge a f uniformemente en $\Omega \setminus Z$, y con esto quedaría vista la convergencia casi uniforme de f_n a f.

Sea $\delta > 0$ y $\{p_{m_1},\dots,p_{m_k}\}$ una familia finita de seminormas. Para cada p_{m_i} existe n_i tal que si $n \geq n_i$ tenemos que

$$p_{m_i}(f_n(x) - f(x)) < \delta$$

en todo x de $\Omega \setminus Z \subset \Omega \setminus Z_{m_i}$. Si tomamos n_o = máx $\{u_1,\dots,n_K\}$ y.

$n \geq n_o$ entonces

$$p_{m_i}(f_n(x) - f(x)) < \delta$$

para todo x de $\Omega \setminus Z$ y todo $i=1,\ldots,K$. De aquí resulta el teorema trivialmente ya que la topología en E viene dada por conjuntos finitos de seminormas p_{m_i}.#

Los lemas siguientes tienen gran importancia en cuanto que dan idea del comportamiento de las funciones $\bar{\mu}$-medibles y μ-medibles con respecto a la restricción tanto en el conjunto original como en la imagen. Su utilidad es grande en las proposiciones que les suceden. Mediante las caracterizaciones de las funciones por su imagen se puede obtener una demostración rápida y sencilla de la conservación del carácter de la medibilidad en conjuntos más pequeños que los iniciales.

<u>Lema 7</u>: Sea E un espacio localmente convexo. Si E_o es un subespacio vectorial de E y $f : \Omega \to E$ es una función $\bar{\mu}$-medible tal que $f(\Omega) \subset E_o$, entonces f es μ-medible de Ω a E_o.

DEMOSTRACION: Sea W un entorno absolutamente convexo de cero en E_o, y sea V° un entorno absolutamente convexo de cero en E_o tal que $2V^\circ \subset W$. Existe un V entorno absolutamente convexo de cero en E tal que $V \cap E_o = V^\circ$ por el teorema 3.1 de [40], existe un conjunto contable M en E tal que

$$f(\Omega \setminus Z) \subset M \dot{+} V,$$

y por tanto

$$f(\Omega \setminus Z) \subset (M + V) \cap E_o.$$

Si ordenamos M, obtenemos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Elegimos los

x_n de modo que

$$(x_n + V) \cap E_o \neq \emptyset$$

y para cada uno de éstos existe x'_n tales que

$$x'_n \in x_n + V \qquad y \qquad x'_n \in E_o$$

por tanto

$$x_n \in x'_n + V$$

y

$$f(\Omega \setminus Z) \subset M' + 2V$$

donde $M' = \{x'_n\}$, con lo cual queda visto que

$$f(\Omega \setminus Z) \subset (M' + 2V) \cap E_o = M' + 2V_o \subset M' + W$$

Dada una seminorma p en E_o, y para todo x de E_o, es inmediato comprobar que $p(f-x)$ es medible.

Por el teorema 3 se concluye la tesis.#

Lema 8: Sea E un espacio localmente convexo. Si E_o es un subespacio vectorial de E y $f : \Omega \to E$ una función μ-medible tal que $f(\Omega) \subset E_o$, entonces f es μ-medible de Ω a E_o.

DEMOSTRACION: Por ser f una función μ-medible, existe un conjunto Z de medida cero nula y una sucesión de conjuntos precompactos $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ en E tal que

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \bigcup_n P_n$$

de forma que para todo $\varepsilon > 0$, existe n_o tal que $\mu^*(\Omega \setminus f^{-1}(P_{n_o})) < \varepsilon$.

Como $f(\Omega) \subset E_o$, entonces

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \bigcup_n (P_n \cap E_o)$$

con los $P_n \cap E_o$ precompactos en E_o y $f^{-1}(P_n \setminus E_o) = f^{-1}(P_n)$.

Dada una seminorma continua p en E_o, es inmediato que $p(f-x)$ es medible Borel para todo x de E_o.

Aplicando el teorema 4, se concluye la tesis.#

Lema 9: Si E e.l.c. y (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finita y completa, $f : \Omega \to E$ es S_o, S, M ó $\bar{M}$, y si $\Omega' \subset \Omega$ es medible entonces $f|_{\Omega'}$ es S_o, S, M, ó $\bar{M}$ respectivamente.

DEMOSTRACION: Sea f una función en S_o, entonces

$$f = \Sigma a_i \, \chi_{\Delta_i}$$

entonces

$$f|_{\Omega'} = \Sigma a_i \, \chi_{\Delta_i \cap \Omega'} \quad \text{que es simple en } \Omega'$$

si f es simple existe una red $(f_\alpha)_\alpha$ de funciones S_o que converge uniformemente a f, entonces $f|_{\Omega'}$ es el límite uniforme de $(f_{\alpha}|_{\Omega'})_\alpha$ que son de S_o, luego f es de $S(\Omega',\Sigma_{\Omega'},\mu)$.

Si f es μ-medible existe una sucesión $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ conjuntos medibles disjuntos y un conjunto $(Z = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i)$ tal que $\mu(Z) = 0$, cumpliendo

$$f = \sum_i f \, \chi_{K_i} + f \, \chi_Z$$

con cada $f \chi_{K_i}$ simple. Entonces

$$f|_{\Omega'} = \Sigma(f \, \chi_{K_i})|_{\Omega'} + (f \, \chi_Z)|_{\Omega'}$$

y $f \chi_{K_i}|_{\Omega'}$ es simple en Ω', luego $f|_{\Omega'}$ es μ-medible. Si f es $\bar{\mu}$-medible el razonamiento es análogo al paso de los S_o a los S.#

Teorema 10: Sea E un espacio LF. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, una sucesión de funciones $\bar{\mu}$-medibles de un espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) a E. Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en casi todo punto a f, enton ces converge casi uniformemente.

DEMOSTRACION: Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de espacios localmente convexos de Frechet que definen a E como límite inductivo estricto. Por el Lema 13.1 de |40| y el hecho de ser cada E_k metrizable es sencillo comprobar que existe una sucesión no creciente $(U_m)_{m=1}^{\infty}$ de entornos absolutamente convexos y cerrados de 0 en E tal que $(U_m \cap E_k)_{m=1}^{\infty}$ es una base de entornos de cero en E_k para todo k.

Vamos a demostrar que cada subespacio E_k pertenece a la menor σ-álgebra inducida en E por la familia de funciones escalares uniformemente continuas y definidas en E.

Sea p_n el funcional de Minkowski de U_n, es decir,

$$p_n(x) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : x \in \lambda U_n\}$$

y

$$\rho_n(x) = \inf \{p_n(x-y) : y \in E_1\}.$$

Si x pertenece a E_1, entonces $\rho_n(x) = 0$ para todo n.

Si x pertenece a $E_K \setminus E_1$ entonces existe U_n tal que

$$(x + U_n) \cap E_1 = \emptyset$$

para todo $n \geq n_o$, y por tanto

$$p_n(x - y) \geq 1$$

para todo $n \geq n_o$, lo que implica que

$$\rho_n(x) \geq 1 \quad \text{para todo} \quad n \geq n_o.$$

Definamos unas nuevas funciones,

$$h_n(x) = \inf_n \{1, \rho_n(x)\}$$

si tomamos $h(x) = \lim_n h_n(x)$

tenemos que ρ_n y h_n son uniformemente continuas porque

$$|\rho_n(x) - \rho_n(y)| \leq p_n(x - y)$$

y

$$|h_n(x) - h_n(y)| \leq p_n(x - y).$$

Entonces la función $h(x)$ es cero si x pertenece a E_1 y 1 si x no pertenece a E_1, luego E_1 es el conjunto de ceros del límite de una sucesión de funciones uniformemente continuas. Así queda visto lo que queríamos, ya que aplicaríamos el mismo proceso a cualquier E_K. Este hecho será importante en todo lo que queda del capítulo.

Pasemos ahora a probar el teorema de Egorov; como las funciones $\bar{\mu}$-medibles son un espacio vectorial, podemos tomar la diferencia de la sucesión y el límite y suponer sin perder generalidad que

$$\lim_n f_n(t) = 0 \quad \text{para todo} \quad t \text{ de } \Omega$$

ya que por ser el espacio de medida completo tampoco resta generalidad el suponer la convergencia puntual.

Como las funciones $\bar{\mu}$-medibles son uniformemente Baire, esto es, que al componerlas con una función de E en $\mathbb{K}$ uniformemente continua dan una función medible, entonces

$$f_n^{-1}(E_k) \quad \text{es medible para todo} \quad k,$$

y también son medibles los conjuntos

$$\Omega_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}(E_m).$$

Por la convergencia puntual

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$$

y

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_m \subset \cdots$$

Luego dado $\varepsilon > 0$ existe p tal que

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_p) \leq \varepsilon/2$$

y además

$$f_m(\Omega_p) \subset E_p \qquad \text{para todo } m.$$

Es inmediato comprobar que $f_{m|\Omega_p} : \Omega_p \to E$ es $\bar{\mu}$-medible, y por el lema, como $f_{m|\Omega_p}(\Omega_p) \subset E_p$, $f_{m|\Omega_p}$ es $\bar{\mu}$-medible en E_p, por ser E_p un espacio metrizable y por la proposición anterior, existe $H_o \subset \Omega_p$ medible tal que $\mu(\Omega_p \setminus H_o) < \varepsilon/2$ y $f_{m|\Omega_p}$ converge uniformemente en H_o.

Entonces $\mu(\Omega \setminus H_o) < \varepsilon$ y $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ converge uniformemente a cero en H_o, con lo cual $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ converge casi uniformemente a cero.#

Proposición 11: Si E es un espacio LF, entonces $M(\Sigma,\mu,E) = \bar{M}(\Sigma,\mu,E)$.

DEMOSTRACION: Sea f una función $\bar{\mu}$-medible, como

$$E = \bigcup_n E_n$$

y en cada E_n pertenece a la mínima σ-álgebra engendrada por las funciones uniformemente continuas de E en $\mathbb{K}$, entonces tenemos que los conjuntos

$$f^{-1}(E_1) \subset f^{-1}(E_2) \subset f^{-1}(E_3) \quad \ldots.$$

son medibles.

Tomamos $\Delta_1 = f^{-1}(E_1)$

$\Delta_2 = f^{-1}(E_2) \setminus f^{-1}(E_1)$

$\vdots$

$$\vdots$$

$$\Delta_K = f^{-1}(E_n) \setminus f^{-1}\Big(\bigcup_{k<n} E_k\Big)$$

y los Δ_i son medibles y disjuntos. Se cumple

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f \cdot \chi_{\Delta_i}$$

y $f.\chi_{\Delta_i}$ es una función $\bar{\mu}$-medible, ya que es el producto de una función escalar μ-medible y una función vectorial $\bar{\mu}$-medible.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe n_o tal que

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{n_o}} \Delta_i\Big) \geq \mu(\Omega) \quad \varepsilon/2$$

como cada $f \cdot \chi_{\Delta_i} : \Omega \to E$ es $\bar{\mu}$-medible y se aplica en un conjunto E_n que es metrizable, $f\, \chi_{\Delta_i} : \Omega \to E_n$ es μ-medible, y para todo $\varepsilon > 0$ existe $K_i \subset \Delta_i$ tal que $\mu(\Delta_i \setminus K_i) \leq \varepsilon/2^{i+1}$ y $f\, \chi_{K_i} = f\, \chi_{\Delta_i}\, \chi_{K_i}$ es simple de Ω en E_n.

Por ser

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n_o} \Delta_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n_o} K_i\Big) \leq \varepsilon/2$$

se tiene que

$$\mu\Big(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n_o} K_i\Big) \leq \varepsilon$$

y

$$f\chi_{\bigcup_i^{n_o} K_i} = \sum_{i=1}^{n_o} f \cdot \chi_{\Delta_i} \cdot \chi_{K_i}$$

que es suma finita de funciones simples, y por tanto es simple, con lo que queda visto que f es μ-medible.#

<u>Proposición 12</u>: Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa, y $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios de Frechet localmente convexos. Entonces las funciones μ-medibles de Ω en $E = \sum_{i\in I} E_i$ cumplen el teorema de Egorov.

DEMOSTRACION: Primero vamos a ver que toda función μ-medible f se aplica en la suma de un conjunto numerable de E_i. En efecto, existe un conjunto Z de medida 0 tal que

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \bigcup_n P_n$$

donde los P_n son precompactos, pero por la definición de la topología suma vectorial todo conjunto precompacto en E está en la suma de un número finito de E_i, luego

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \sum_{h \in H} E_h \quad \text{donde } H \subset I \text{ y } H \text{ contable.}$$

Sea f_n una sucesión de funciones μ-medibles que converge casi puntualmente a f, que será $\bar{\mu}$-medible en principio. Para cada n, existe Z_n tal que $\mu(Z_n) = 0$ y $f_n(\Omega \setminus Z_n) \subset \sum_{h \in H_n} E_h$ con H_n contable.

Si tomamos

$$Z = \bigcup_n Z_n$$

tenemos que $\mu(Z) = 0$ y

$$f_K(\Omega \setminus Z) \subset \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h \in H_n} E_h$$

por tanto

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h \in H_n} E_h$$

y estamos en las condiciones de la proposición 7, y se cumple la proposición.

Observemos además que f es μ-medible, es decir que el límite casi puntual de funciones μ-medibles es μ-medible.#

<u>Corolario</u>: Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa y $\{E_i\}$ una familia de espacios l.c. de Frechet. Toda función f de Ω

en $E = \sum_{i \in I} E_i$ que sea esencialmente σ-precompacta se aplica en la suma de una cantidad numerable de E_n elementos de la familia.

DEMOSTRACION: Basta con la primera parte de la proposición 9.#

En el capítulo siguiente se relacionan la μ-medibilidad y la $\bar{\mu}$-medibilidad con la medibilidad Borel, Baire, etc..., como veremos hay un tipo de medida que estudia extensamente el artículo de Varadarajan |42| que dan importantes propiedades a las funciones cuya medida imagen son de esa clase. Veamos la definición de nuevo.

Definición 13: Una medida μ finita definida en la σ-álgebra de Baire de un espacio topológico (E,T) se dice rígida si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $K \subset E$ compacto tal que

$$\mu^*(K) \geq \mu(\Omega) - \varepsilon$$

(Nota: rígido ès la traducción que hemos elegido de la palabra inglesa tigth).

Ya veremos en el último capítulo la importancia de estas medidas en los espacios de Banach.

Proposición 14: Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa. Sea $f: (\Omega,\Sigma,\mu) \to E$ una función μ-medible, donde E es un espacio localmente convexo polar y semireflexivo. Entonces f induce en E una medida de Baire que es rígida.

DEMOSTRACION: Por ser E polar semireflexivo, f es medible Baire, entonces

$$\mu f : (E, \text{Baire}) \longrightarrow R_+$$
$$A \longrightarrow \mu(f^{-1}(A))$$

es una medida finita.

Por ser f μ-medible existe Z con $\mu(Z) = 0$, y una sucesión no decreciente $\{P_n\}$ de precompactos tales que

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \bigcup_n P_n$$

por tanto

$$f(\Omega \setminus Z) \subset \bigcup_n \overline{P_n}$$

y los $\overline{P_n}$ serán compactos ya que en un espacio polar y semireflexivo los precompactos son relativamente compactos.

Como

$$\Omega \setminus Z \subset f^{-1}(\bigcup_n \overline{P_n}) = \bigcup_n f^{-1}(\overline{P_n}) \subset \Omega$$

tenemos que

$$\mu(\Omega \setminus Z) = \mu(\Omega) \leq \mu^*(\bigcup_n f^{-1}(\overline{P_n})) = \mu^*(\lim_n f^{-1}(\overline{P_n})) \leq \mu(\Omega).$$

luego existe n_o tal que

$$\mu^*(f^{-1}(\overline{P_n})) \geq \mu(\Omega) - \varepsilon.$$

Pero

$$\mu^*(f^{-1}(\overline{P_n})) = \inf \{\mu(A) : A \in \Sigma \quad y \quad A \supset f^{-1}(\overline{P_n})\},$$

y

$$(\mu f)^*(\overline{P_n}) = \inf \{\mu f(B) : B \in \text{Baire }(E) \quad y \quad B \supset \overline{Pn}\} =$$

$$= \inf \{\mu(f^{-1}(B)) : B \in \text{Baire }(E) \quad y \quad B \supset \overline{P_n}\} =$$

$$= \inf \{\mu(f^{-1}(B)) : B \in \text{Baire }(E),\ f^{-1}(B) \in \Sigma \quad y \quad f^{-1}(B) \supset$$

$$\supset f^{-1}(P_n)\} \geq \mu^*(f^{-1}(\overline{P_n})),$$

luego

$$\mu f^*(\overline{P_n}) \geq \mu(\Omega) - \varepsilon._{\#}$$

Proposición 15: Sea (Ω,Σ,μ) un espacio, de medida finita y completa. Sea μ una medida definida en E, espacio localmente convexo polar semireflexivo, inducida por una función de Baire de Ω en E. Si μ es rígida entonces f es $\bar{\mu}$-medible.

DEMOSTRACION: Sea μ una medida en las condiciones del enunciado, es decir, tal que existe una función $f : \Omega \to E$ medible Baire tal que

$$\mu = \mu f : \text{Baire } (E) \to \mathbb{R}_+$$

y μf es rígida, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe K compacto en E tal que

$$\mu f^*(K) \geq \mu(\Omega) - \varepsilon$$

Dado V entorno abierto absolutamente convexo de cero en E, existe $\{x_1,\ldots,x_n\}$ E tal que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$$

y $x_i + V$ es de Baire en E ya que $V = p_V^{-1}(-1,1)$.

Por tanto dado $\varepsilon > 0$ y V se tiene que

$$f(\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)) \geq \mu(\Omega) - \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = 1/k$, existe $\{x_{k_1},\ldots,x_{k_n}\} = M_k$ tal que

$$\mu f(\bigcup_{i=1}^{n(k)} (x_{k_i} + V)) \geq \mu(\Omega) - 1/k$$

entonces

$$\mu(\bigcup_{k} (f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n(k)} (x_{k_i} + V))) = \mu(\Omega)$$

y

$$Z_V = \Omega \setminus (\bigcup_{k} (f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n(k)} (x_{k_i} + V))))$$

tiene medida cero.

Si llamamos

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n(k)} \{x_{k_i}\}$$

entonces

$$f(\Omega \setminus Z_V) \subseteq f(\bigcup_{k} (f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n(k)} (x_{k_i} + V))) \subset M + V$$

luego f es esencialmente ω-precompacto.

Por ser f medible Baire es inmediato que es para toda seminorma continua p y todo x de E p(f-x) es medible, por tanto f es $\bar{\mu}$-medible.#

<u>Corolario</u>: Si E es un espacio LF, si f es una medida imagen de una función $f : \Omega \to E$ con (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa, entonces μf es rígida si y solamente si f es μ-medible.

DEMOSTRACION: Es inmediata a partir de las proposiciones 11, 14 y 15.

CAPITULO III

RELACION ENTRE LAS MEDIBILIDADES

La relación entre las "medibilidades de aproximación" y las de "imágenes inversa" es importante en el sentido de que las primeras son usadas tradicionalmente en la teoría de integración y sus derivados como el teorema de Radon Nikodym, o teoremas de convergencia, mientras que las segundas son usadas para obtener teoremas importantes de imágenes inversas de medidas y teoremas de Isomorfismos. En esta línea se enmarca éste capítulo, es decir, en relacionar primero para espacios métricos y luego para LF las medibilidades citadas en el capítulo anterior.

Las herramientas principales serán un teorema de Marczewski-Sikoski, y conceptos de la teoría de cardinales medibles |23|.

Proposición 1: Sea E un espacio localmente convexo metrizable y separable, (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita, si $f:\Omega\to E$ es una aplicación medible Borel entonces f es μ-medible. Si además (Ω,Σ,μ) es completo entonces toda función μ-medible es medible Borel.

DEMOSTRACION: Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un subconjunto numerable y denso en E. Si $B(0,1)$ es una bola abierta unidad, es claro que,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_k + B(0,1)) = E$$

Tomemos a partir de estos conjuntos los siguientes

$$B_1^1 = (x_1 + B(0,1))$$

$$B_p^1 = (x_p + B(0,1)) \setminus \left|\bigcup_{q<p} (x_p + B(0,1))\right| \quad \text{con } p \text{ un número natural}$$

entonces

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^1 = E \quad \text{y} \quad B_k^1 \cap B_j^1 = \emptyset \quad \text{si} \quad K \neq j$$

Sean

$$\Delta_{11} = f^{-1}(B_1^1) \quad \ldots\ldots \quad \Delta_{1j} = f^{-1}(B_j^1) \quad \ldots\ldots,$$

estos conjuntos serán medibles ya que f es medible Borel y

$$B_j^1 \in \text{Borel } (E)$$

Consideremos la función

$$f_1 = x_1 \chi_{\Delta_{11}} + x_2 \chi_{\Delta_{12}} + \ldots\ldots$$

esta función es μ-medible y

$$d(f(t),\ f_1(t)) < 1$$

para todo t de Ω.

Hacemos la misma construcción con la bola $B(0,1/n)$ obteniendo los conjuntos

$$B_p^n = (x_p + B(0,1/n)) \setminus \left| \bigcup_{q<p} (x_q + B(0,1/n)) \right| \quad \text{para } p \text{ un número natural}$$

y

$$\Delta_{n,1} = f^{-1}(B_1^n) \quad \ldots\ldots \quad \Delta_{n,p} = f^{-1}(B_p^n)$$

y la función

$$f_n = x_1 \chi_{\Delta_{n1}} + \ldots + x_p \chi_{\Delta_{n,p}} + \ldots$$

que es μ-medible y

$$d(f(t), f_n(t)) < 1/n \quad \text{para todo } t \text{ de } \Omega.$$

Entonces f es el límite uniforme de la sucesión f_n, por tanto f es $\overline{\mu}$-medible y por ser el espacio métrico es μ-medible.

Si (Ω,Σ,μ) es de medida finita y completa es inmediato comprobar que toda función μ-medible es medible Borel, ya que toda función simple es de Borel por ser E un espacio métrico y las funciones

μ-medibles son límite casi puntual de una sucesión de funciones simples.#

Definición 2: Un conjunto X tiene cardinal de medida cero si toda medida μ definida en $P(X)$ tal que se anula sobre los conjuntos unitarios es la medida idénticamente cero.

Un conjunto x tiene cardinal no medible si toda medida μ definida en $P(X)$ que toma valores en $\{0,1\}$ (medida dos-valuada) y que se anula sobre los conjuntos unitarios es la medida idénticamente cero.

Proposición 3: Si E es un espacio localmente convexo y metrizable con paso de medida cero y (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finita y completa, entonces las funciones medibles Borel y μ-medibles coinciden.

DEMOSTRACION: Por ser E un espacio métrico toda función μ-medible es medible Borel.

Sea f una función medible Borel a partir de ella definimos la medida imagen por

$$\mu f : \text{Borel }(E) \longrightarrow R_+$$
$$\Lambda \longrightarrow \mu(f^{-1}(\Delta)).$$

Además, por el Teorema de Marczewski-Sikorski |25|, la medida μf descompone el espacio E en dos conjuntos disjuntos N y S tales que S es cerrado y separable y N es tal que $\mu f(N) = 0$. Como

$$\mu f(N) = \mu(f^{-1}(N)) = 0$$

la función f es esencialmente separable.

Según el Teorema II.3 falta comprobar que para toda seminorma continua en E, y para todo x de E, $p(f-x)$ es medible. Esto es inmediato ya que $f-x$ es medible Borel.#

A partir de la proposición anterior se obtiene como corolario el teorema de Stone concerniente a la sumabilidad de funciones medibles Borel.

Corolario: En las condiciones de la proposición 3, la suma de dos funciones medibles Borel es medible Borel.

DEMOSTRACION: Se deduce de forma inmediata de la proposición 3 y del hecho de que las funciones μ-medibles forman un espacio vectorial.#

El Teorema de Marczewski-Sikorski de una caracterización para que el paso de un espacio métrico sea de medida cero y es precisamente que para toda medida de Borel finita en E se tiene una descomposición del tipo $E = N \cup S$ con S un espacio cerrado y separable, $\mu(N) = 0$ y $N \cap S = \emptyset$. (Que hemos llamado descomposición del tipo Marczewski).

Vamos a dar una nueva caracterización cuando el espacio E es e.l.c. y metrizable mediante las funciones μ-medibles. Para ello comprobemos que si para todo (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita y completa, las funciones medibles Borel de Ω en E y el de las funciones μ-medibles coinciden entonces toda medida de Borel finita en E tiene una descomposición de tipo Marczewski.

Proposición 4: Sea E un e.l.c. metrizable. Si para todo espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) se tiene que el conjunto de las funciones μ-medible de Ω en E coincide con el conjunto de las funciones medibles Borel de Ω en E, entonces toda medida de Borel en E finita tiene una descomposición de tipo Marczewski.

DEMOSTRACION: Sea μ una medida de Borel finita en E. Sea $L(E)$ la compleción de la σ-álgebra de conjuntos Borel en E, y $\tilde{\mu}$ la extensión de μ a $L(E)$.

Como el espacio $(E,L(E),\tilde{\mu})$ es finito y completo y la aplicación identidad

$$I : (E,L(E),\tilde{\mu}) \longrightarrow (E, \text{Borel } (E))$$

es medible Borel, por hipótesis tenemos que I es $\tilde{\mu}$-medible. Según el teorema II.3, para toda bola $B(0,1/n)$ existe Z_n medible con $\tilde{\mu}(Z_n) = 0$ y

$$I(E \setminus Z_n) = E \setminus Z_n \subset M_n + B(0,1/n)$$

donde M_n es un subconjunto numerable de E.

Entonces si $Z = \bigcup_n Z_n$ se tiene $\tilde{\mu}(Z) = 0$ y

$$E \setminus Z = E \setminus \bigcup_n Z_n = \bigcup_n (E \setminus Z_n) \subset \bigcup_n (M_n + B(0,1/n)) \subset$$

$$\subset \overline{\bigcap_n (M_n + B(0,1/n))} = S$$

S es cerrado y separable ya que

$$M = \bigcup_n M_n$$

es un conjunto denso y numerable en S. Veámoslo, sea s de S y $\varepsilon > 0$. Como

$$s \in \overline{\bigcap_n (M_n + B(0,1/n))},$$

existe

$$h \in \bigcap_n (M_n + B(0,1/n)$$

tal que

$$d(s,h) < \varepsilon/2.$$

Si tomamos k un número natural de forma que $1/k < \varepsilon/2$ en M_k hay un m que cumple

$$d(h,m) < 1/k < \varepsilon/2$$

y por tanto

$$d(s,m) < d(s,h) + d(h,m) < \varepsilon.$$

Con esto demostramos que S es separable.

$Z \setminus S$ y S descomponen a E ya que son disjuntos

$$E = (Z \setminus S) \cup S,$$

y dicha descomposición es de tipo Marczewski puesto que S es cerrado y separable, $Z \setminus S$ es abierto por ser el complementario de S y además

$$\mu(Z \setminus S) = \tilde{\mu}(Z \setminus S) \leq \tilde{\mu}(Z) = 0.\#$$

Teorema 5: Sea E un espacio localmente convexo metrizable, son equivalentes:

a) El peso de E es de medida cero.

b) Para todo espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) y completo se cumple

$$F_{Borel}(\Omega, E) = M(\Sigma, \mu, E)$$

c) Toda medida de Borel finita en E tiene una descomposición del tipo Marczewski.

DEMOSTRACION: a) $\Longrightarrow$ b) por la proposición 3.

b) $\Longrightarrow$ c) por la proposición 4.

c) $\Longrightarrow$ a) por el Teorema de Marczewski |25|.#

Nota: Suponiendo la hipótesis generalizada del continuo, la existencia de cardinales real medible es indemostrable en una gran parte de las axiomáticos de conjuntos usuales, (incluso en la de Von Newman-Gö del se sabe que no existen). El teorema 5 da propiedades de aproximación para las funciones medibles Borel en un espacio e.l.c. métrico y las caracteriza por su rango, con lo cual se puede extender la teoría de integración a dichas funciones.

Proposición 6: Si E es un espacio localmente convexo y separable, toda función uniformemente Baire es $\bar{\mu}$-medible.

DEMOSTRACION: Sea f una función uniformemente Baire, e.d. si h es una función uniformemente continua de E en $\mathbb{R}$, entonces $h \circ f$ es medible Borel, y para todo x de E, $h \circ (f-x)$ es medible. Veámoslo:

$$(h \circ (f-x))^{-1}(c) = (f-x)^{-1}h^{-1}(c) = \{t \in \Omega : f(t) - x \in h^{-1}(c)\} =$$

$$= \{t \in \Omega : f(t) \in x + h^{-1}(c)\} = \{t \in \Omega : f(t) \in g^{-1}(c)\}$$

donde

$$g = h \circ F$$

y

$$F : E \longrightarrow E$$
$$y \longrightarrow y-x$$

Como F es uniformemente continua, $h \circ F$ es uniformemente continua y

$$h \circ (f-x)^{-1}(c) \in \Sigma.$$

Además cualquier seminorma continua en E es uniformemente continua, por tanto $p(f-x)$ es medible.

Solo queda comprobar que f es ω-esencialmente precompacta, e.d. para todo entorno V de cero en E existe Z_V con $\mu(Z_V) = 0$ y un conjunto contable M tal que

$$f(\Omega \setminus Z_V) \subset M + V.$$

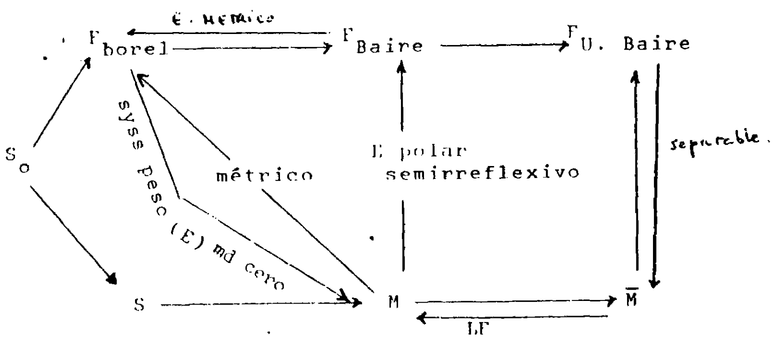
Podemos tomar $Z_V = \emptyset$ y M un subconjunto denso y contable de E, pues E es separable.

Por tanto toda función uniformemente Baire es $\bar{\mu}$-medible.

<u>Corolario</u>: Si E es un espacio localmente convexo separable entonces el conjunto de las funciones μ-medibles coincide con el conjunto de las funciones uniformemente Baire.

DEMOSTRACION: Es inmediato que toda función $\bar{\mu}$-medible es uniformemente Baire |31|.#

Podemos resumir en un esquema los resultados anteriores utilizando la notación de |31|. (E es un espacio localmente convexo y (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finita y completa).



Lema 7: Sea E un espacio LF y sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión no decreciente de espacios de Frechet que inducen en E su topología. Sea S un subconjunto cerrado separable de E; entonces para todo E_n se cumple $E_n \cap S$ es separable en E_n.

DEMOSTRACION: Llamemos $(U_k)_{k=1}^{\infty}$ a una base de entornos absolutamente convexos en E_n y $(U_k^*)_{k=1}^{\infty}$ a una sucesión de entornos absolutamente convexos en E tal que

$$U_k = E_n \cap U_k^*.$$

Si $M = \{x_p\}_{p=1}$ es un subconjunto denso en S, fijado K_o, entonces

$$S \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} (x_p + U_{k_o}^*).$$

Eliminamos aquellos $x_p + U_{k_o}^*$ tales que $(x_p + U_{k_o}^*) \cap (S \cap E_n) = \emptyset$.

Para todo p tal que

$$(x_p + U_{k_o}^*) \cap (S \cap E_n) \neq \emptyset$$

existe a_{p,k_o} que pertenece a $(x_p + U_{k_o}^*) \cap (S \cap E_n)$, por tanto

$$a_{p,k_o} \in x_p + U_{k_o}^*$$

y

$$x_p \in a_{p,k_o} + U_{k_o}^*$$

ya que $U_{k_o}^*$ es absolutamente convexo.

Comprobemos que $A = \{a_{p,k_o}\}_{p,k_o}$ es denso en $S \cap E_n$.

Sea s un elemento de $S \cap E_n$. Dado U_p, existe U_h de forma que

$$U_h + U_h \subset U_p.$$

Consideremos U_h^*, entonces existe x_p que cumple

$$x_p \in S + U_h^*$$

y

$$S \in x_p + U_h^*$$

Por tanto existe $a_{p,h}$ que pertenece a $S \cap E_n$ y a $x_p + U_h^*$. Pero

$$S \in (a_{p,h} + U_h^* + U_h^*) \cap E_n = (a_{p,h} + 2U_h^*) \cap E_n =$$

$$= a_{p,h} + 2U_h \subset a_{p,h} + U_p$$

con lo que queda demostrado que A es denso en $S \cap E_n$, y como A es numerable $S \cap E_n$ es separable.

<u>Lema 8</u>: Sea E un espacio LF, inducido por la sucesión no decreciente de espacios de Frechet $(E_n)_{n=1}^{\infty}$. El peso de E es de medida cero si y sólo si el peso de cada E_n es de medida cero.

DEMOSTRACION: <u>$\Longrightarrow$</u>| Supongamos que el peso de E es de medida cero, e.d. existe en E un conjunto denso A tal que el cardinal de A es de medida cero, por tanto, para cada entorno V de cero en E, se cumple

$$E = \bigcup_{a \in A} (a + V).$$

Si $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ es una base de entornos absolutamente convexos en E_k y $(U_n^*)_{n=1}^{\infty}$ son entornos absolutamente convexos en E tales que

$$U_n^* \cap E_k = U_n.$$

Para todo U_n^*

$$E = \bigcup_{a \in A} (a + U_n^*),$$

elegimos el conjunto $A' = \{a \in A : (a + U_n^*) \cap E_k \neq \emptyset\}$. Evidentemente A' tiene cardinal de medida cero.

Para cada a' perteneciente a A' tomamos x' perteneciente a E_k tal que

$$x' \in a' + U_n^*$$

Llamaremos M_n' al conjunto de los x'.

Demostremos que $\bigcup_n M_n'$ es denso en E_k : Sea V entorno de cero en E_k. Existe U_n absolutamente convexo tal que $2U_n \subset V$.

Para todo x de E_k, se tiene a' de A' de forma que

$$a' \in x + U_n^*$$

y

$$x \in a' + U_n^*,$$

luego hay un elemento x' de M_n', que cumple

$$x' \in a' + U_n^*, \quad x' \in x + 2U_n^*$$

y

$$x' \in x + 2U_n \subset x + U.$$

Para terminar basta tener presente que el cardinal de $\bigcup_n M_n'$ tiene medida cero.

$\Leftarrow$| Supongamos que cada E_n tiene peso de medida cero, e.d. existe A_n subconjunto de E_n con cardinal de medida cero y denso en E_n. Entonces

$$A = \bigcup_n A_n$$

tiene cardinal de medida cero, y es denso en E, ya que dado x de E y V entorno convexo en E, x pertenece a un cierto E_k y $(x + V) \cap E_k$ es un entorno convexo de x en E_k. Por tanto existe a de A_k que cumple

$$a \in (x + V) \cap E_k \subset x + V._{\#}$$

Los dos lemas anteriores nos permiten dar la versión del Teorema de Marczewski y Sikorski para los espacios LF de forma análoga a como se ha dado anteriormente para métricos.

En el paso a espacios LF la proposición b) del Teorema 5 se tiene que modificar ya que las funciones medibles Borel de un espacio de medida finita y completo a E son todas las funciones μ-medibles sino un subconjunto de éstas.

Definición 9: Sea E un espacio LF, $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión no decreciente de subespacios de E que inducen en E la topología y (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita. Si f es una función de Ω en E μ-medible, diremos que es μ^*-medible (en abreviatura $f \in M^*(\Sigma,\mu,E)$) si existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones μ-medibles tal que converge puntualmente a f, y para cada n existe k(n) de forma que

$$f_n(\Omega) \subset E_k(n).$$

En el caso métrico las funciones μ^*-medibles y μ-medibles coinciden, por tanto la definición es la natural.

En lo que sigue de capítulo E será un espacio LF inducido por una sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ no decreciente de subespacios de E.

Proposición 10: Si E es un espacio LF con peso de medida cero y si (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finita y completo, entonces el conjunto de las funciones medibles Borel $\Gamma_{Borel}(\Omega,E)$ coincide con el conjunto $M^*(\Sigma,\mu,E)$.

DEMOSTRACION: Sea f una función μ^*-medible y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones de Ω en E cuya existencia asegura la definición 5. Por el Lema II.8 f_n es μ-medible de Ω a algún subespacio E_K que denotaremos $E_K(n)$. Como E tiene peso de medida cero, por el lema

2, $E_K(n)$ tiene peso de medida cero, y f_n es medible Borel de en $E_K(n)$. Además f_n es medible Borel de Ω a E ya que dado un abierto A en E

$$f_n^{-1}(A) = f_n^{-1}(A \cap E_K(n)) \in \Sigma.$$

Sea

$$A_K = \{t \in \Omega : f_n(t), \in E_K, \text{ para todo } n\} = \\ = \bigcap_n f_n^{-1}(E_K)$$

que es medible por ser E_K cerrado y los f_n medibles Borel, y por la convergencia puntual de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\Omega = \bigcup_K A_K.$$

Consideramos las restricciones de f_n y f a A_K

$$f_n\big|_{A_K}, f\big|_{A_K} : A_K \longrightarrow E_K,$$

$f_n\big|_{A_K}$ es medible Borel de A_K en E_K, pues dado V abierto en E_K y V' un abierto en E tal que $V = V' \cap E_K$ se tiene

$$(f_n\big|_{A_K})^{-1}(V) = \{t \in A_K : f_n(t) \in V\} = \{t \in A_K : t \in f_n^{-1}(V' \cap E_K)\} = \\ = A_K \cap f_n^{-1}(V' \cap E_K)$$

que pertenece a Σ.

Por ser E_K metrizable, $f\big|_{A_K}$ es medible Borel de A_K en E_K, y se deduce que f es medible Borel de Ω en E, ya que dado V abierto en E,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap (\bigcup_K A_K) = \bigcup_K (f^{-1}(V) \cap A_K) = \\ = \bigcup_K \{t \in A_K : f(t) \in V\} = \bigcup_K \{t \in A_K : f(t) \in V' \cap E_K\} = \\ = \bigcup_K |A_K \cap (f\big|_{A_K})^{-1}(V' \cap E_K)| \in \Sigma$$

.

Consideremos los conjuntos

$$A_1 = f^{-1}(E_1) \;\ldots\ldots\; A_n = f^{-1}(E_n) \;\ldots.$$

que son medibles por ser E_n cerrado en E para todo n.

Entonces la sucesión de funciones $f.\chi_{A_n}$ converge a f puntualmente, y $f.\chi_{A_n}$ de Ω a E_n es medible Borel, pues, dado H abierto en E_n pueden ocurrir dos casos

i) si contiene a cero, entonces $(f\,\chi_{A_n})^{-1}(H) = A_n^c \cup (f^{-1}(H) \cap A_n)$

ii) H no contiene a cero, entonces $(f.\chi_{A_n})^{-1}(H) = f^{-1}(H) \cap A_n$

Tanto en i) como ii), $(f\,\chi_{A_n})^{-1}(H)$ pertenece a Σ ya que H es de Borel y f es medible Borel.

Puesto que E_n es metrizable y tiene peso de medida cero $f\chi_{A_n}$ es μ-medible de Ω a E_n. Veamos que es f μ-medible de Ω a E:

Dado $\varepsilon > 0$ existe A_n tal que $\mu(\Omega \setminus A_n) \leq \varepsilon/2$. Como $f.\chi_{A_n}$ es μ-medible de Ω a E_n podemos elegir $K_n \subset A_n$ de forma que $\mu(A_n \setminus K_n) \leq \varepsilon/2$ y $f.\chi_{A_n}\,\chi_{K_n}$ es simple de Ω en E_n. Concluimos la demostración teniendo en cuenta que $f.\chi_{A_n}.\chi_{K_n}$ es simple de Ω a E, luego f es μ-medible ya que $\mu(\Omega \setminus (A_n \cap K_n)) \leq \varepsilon$.#

<u>Proposición II</u>: Sea E un espacio LF. Si para todo espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) se tiene que $M^*(\Sigma,\mu,E) = F_{Borel}(\Omega,E)$, entonces toda media de Borel finita en E tiene una descomposición de tipo Marczewski.

DEMOSTRACION: Sea μ una medida de Borel finita en E. Sea $L(E)$ la compleción de la σ-álgebra en E y $\tilde{\mu}$ la extensión de μ a $L(E)$.

Como el espacio $(E,L(E),\tilde{\mu})$ es finito y completo, y la aplicación identidad

$$I : (E,L(E),\tilde{\mu}) \longrightarrow (E, \text{Borel } (E))$$

es medible Borel, por hipótesis tenemos que I es μ^*-medible. Por ser μ-medible existe Z tal que $\tilde{\mu}(Z) = 0$ y

$$I(E \setminus Z) \subset \bigcup_n P_n$$

con $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \ldots$ y precompactos.

E es polar semireflexivo, entonces $\overline{P_n}$ es compacto y separable en algún $E_k(n)$ y lo será evidentemente en E.

Tenemos que $\bigcup_n \overline{P_n}$ es separable y también lo será el conjunto cerrado $S = \overline{\bigcup_n P_n}$, de aquí se deduce que $E \setminus S$ es abierto y

$$\mu(E \setminus S) = \tilde{\mu}(E \setminus S) \leq \tilde{\mu}(Z) = 0$$

luego

$$E = (E \setminus S) \cup S$$

y esta descomposición es de tipo Marczewski.#

Apoyandonos en el caso métrico vamos a dar una demostración del teorema de Marczewski-Sikorski en el caso LF, para obtener un teorema análogo al teorema 5. Con la hipótesis de que no existen cardinales real medibles podemos caracterizar las funciones medibles Borel median te técnicas de aproximación.

<u>Teorema 12</u>: Sea E un espacio LF. E tiene peso de medida cero si y sólo si para cada medida de Borel finita μ en E tiene una descomposición de tipo Marczewski

DEMOSTRACION: $\Longrightarrow$| Sea μ una medida de Borel finita en E. En cada E_n, μ induce una medida

$$\begin{aligned}\mu_n : \text{Borel}(E_n) &\longrightarrow \mathbb{R}_+\\ A &\longrightarrow \mu_n(A) = \mu(A).\end{aligned}$$

Dicha medida es finita y está bien definida ya que por ser E_n cerrado en E todo conjunto de Borel en E_n lo es también en E y la topología de E_n es la inducida por E. Por el lema 8 los E_n tienen peso de medida cero y son metrizables, por tanto mediante el teorema de Marczewski-Sikorski existe una descomposición de E_n en dos conjuntos N_n abierto de medida 0 y S_n cerrado separable en E_n.

Tomando

$$S = \overline{\bigcup_n S_n}$$

y

$$N = E \setminus S = E \setminus (\overline{\bigcup_n S_n})$$

tendremos que

$$\mu(N) \leq \mu(E \setminus \bigcup_n S_n) = \mu(\bigcap_n (E \setminus S_n)) \leq \sum_n (N_n) = 0$$

S y N forman una descomposición de tipo Marczewski ya que S es cerrado y separable, N es abierto y de medida 0.

$\Longleftarrow$| Sea λ una medida de Borel finita en E_n, podemos definir una medida de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mu : \text{Borel}(E) &\longrightarrow \mathbb{R}_+\\ A &\longrightarrow \lambda(A \cap E_n).\end{aligned}$$

Esta medida es finita, y por la hipótesis existe N abierto con $\mu(N) = 0$ y S cerrado separable tal que

$$N \cap S = \emptyset \qquad \text{y} \qquad N \cup S = E$$

Como $\mu(N) = 0 = \lambda(E_n \cap N)$ y $E_n \cap N$ es un abierto en la topología de E_n y $S \cap E_n$ es cerrado y separable por el Lema 7, λ admite una descomposición de tipo Marczewski, y esto caracterizaba que el peso de E_n tuviese medida cero. Entonces por el lema 8 se tiene que E tiene peso de medida cero.$_{\#}$

Para finalizar el capítulo vamos a enunciar, ya que la demostración es inmediata, el análogo al teorema 5 para el caso LF.

<u>Teorema 13</u>: Sea E un espacio LF. Entonces son equivalentes:

a) Cada E_n tiene peso de medida cero.

b) $F_{Borel}(\Omega,E) = M^*(\Sigma,\mu,E)$ para todo espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ).

c) Toda medida de Borel finita en E tiene una descomposición de tipo Marczewski.

DEMOSTRACION: a $\Longrightarrow$ b por la proposición 8.

b $\Longrightarrow$ c por la proposición 9.

a $\Longleftrightarrow$ c por la proposición 10.

<u>Corolario</u>: Sea E un espacio LF y (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa. Si el peso de E es de medida cero, entonces la suma de dos funciones medibles Borel de Ω a E es medible Borel.

DEMOSTRACION: Sean f, g dos funciones medibles Borel de Ω en E. Como el peso de E es de medida cero, f y g son μ^*-medibles. Por tanto existe una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones μ-medibles tal que converge puntualmente a f y para cada n existe $k(n)$ natural tal que $f_n(\Omega) \subset E_{k(n)}$. Igualmente existe una sucesión $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ de funciones μ-medibles tal que converge puntualmente a g y para cada m existe $k'(m)$ tal que $g_m(\Omega) \subset E_{k'(m)}$.

La sucesión $(f_n + g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a $f+g$, y para cada n existe $k''(n) = \text{máx}\,\{k(n),\ k'(n)\}$ de forma que

$$(f_n + g_n)(\Omega) \subset E_{k''(n)},$$

luego $f+g$ es μ^*-medible y por tanto medible Borel.#

Frenlim ha demostrado que de existir un cardinal real medible entonces se puede construir un espacio de Banach X y un espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) y dos funciones medibles Borel tales que la suma no sea medible Borel. El esquema de la construcción es el siguiente: Supone que existe un cardinal real medible, y en un conjunto Y con dicho cardinal toma una medida μ no trivial sobre $P(Y)$ que se anula sobre los conjuntos unitarios, y encuentra dos funciones medibles Borel de $(Y \times Y,\ \mu \otimes \mu)$, siendo $\mu \otimes \mu$ la complección de la medida producto $\mu \otimes \mu$ sobre la σ-álgebra producto, en el espacio de Banach $l^1(Y)$ tales que la suma no es medible Borel.

Por tanto el problema de la existencia de dos funciones medibles Borel cuya suma no sea medible Borel es equivalente al problema de la existencia de cardinales real medibles.

CAPITULO IV

TEOREMA DE EGOROV PARA LA MEDIBILIDAD BOREL

En el estudio del Teorema de Egorov para la medibilidad Borel de funciones de un espacio de medida finito y completo (Ω,Σ,μ) a un grupo topológico conmutativo se plantean dos problemas:

1. En qué condiciones el límite puntual de una sucesión de funciones medibles Borel es medida Borel.

2. En qué condiciones la suma de dos funciones medibles Borel es medible Borel.

Estas cuestiones aparecen por ejemplo en el artículo de Masani |26| en relación con la medibilidad y la integración Pettis en espacios de Hilbert. Vamos a resumir los resultados fundamentales:

Definición: Sea T una topología en un espacio X, y B una σ-álgebra sobre X. Decimos que B es T-estratificable si y sólo si existe $T_o < T$ tal que B es la σ-álgebra de Borel de T_o y

$$\forall V \in T_o \quad \exists \{V_r\}_{r=1}^{\infty} \subset T_o \quad \text{tal que} \quad \bigcup_{r=1}^{\infty} \overline{V_r} = V = \bigcup_{r=1}^{\infty} V_r$$

Lema: Sea (i) M un conjunto cualquier y X un espacio de Haussdorff con la topología T. ii) U cualquier σ-álgebra sobre M y B una σ-álgebra T-estratificable sobre X. Entonces el conjunto de las funciones medibles de M a X es T-secuencialmente cerrada, e.d. el límite T-puntual de una sucesión de funciones medibles de M a X es medible.

Teorema a): Dado un espacio medible (M,U) y X un espacio de Banach si llamamos B a la σ-álgebra de Borel engendrada por la topología de la norma, el conjunto de las funciones medibles Borel de M en X es secuencialmente cerrado.

En el capítulo siguiente estudiaremos condiciones de éste tipo bajo la hipótesis adicional de que el espacio medible es de medida finita y completa.

La segunda condición aparece planteada a Stone por K. Ross cuando ya se conocen resultados al respecto como por ejemplo,

Teorema b) (Nedoma): Sea X un espacio de Banach tal que $cd(X) > \tau = 2^{\aleph_0}$. Entonces existe una σ-álgebra U sobre un conjunto Λ tal que para toda σ-álgebra B en X satisfaciendo $B_R \subset B \subset 2^X$ (con B_R la σ-álgebra engendrada por las bolas de X), las funciones medibles de (Λ,U) en (X,B) no forman un espacio vectorial.

En 1973 D.H. Stone obtiene un teorema |39| en el que suponiendo que (Ω,Σ,μ) es un espacio de medida finita y completa y X es un grupo abeliano metrizable, tales que el cardinal de Ω es de medida cero, o el peso de X es de medida cero entonces la suma de dos funciones medibles Borel es medible Borel.

Este teorema lo hemos obtenido para el caso vectorial como corolario de la proposición III.3, y en este capítulo lo ampliamos a grupos topológicos más generales que los métricos.

Posteriormente aplicamos los resultados al teorema de Egorov.

La hipótesis de cardinalidad no es imprescindible pues usando teoremas muy recientes (1979) fundamentalmente del trabajo de Hansell se pueden obtener los mismos resultados sin más que suponer que Ω es un conjunto absolutamente analítico, Σ es un σ-álgebra de Borel y μ es una medida finita sobre Σ. Ver |14| y |15|, o bien tomando funciones σ-discretas de Borel.

Para finalizar el capítulo hacemos referencia a un contraejemplo en el que el espacio topológico no es métrico y no se cumple el teorema de Egorov. (Como el espacio del contraejemplo es tonelado y bornológico no se puede esperar demostrar el teorema sin condiciones suplementarias).

Lema 1: Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida completa, y E un espacio topológico. Si el espacio E cumple que el límite puntual de una sucesión de funciones medibles Borel es medible Borel, entonces el límite casi puntual de una sucesión de funciones medibles Borel es medible Borel.

DEMOSTRACION: Sea f_N una sucesión de funciones medibles Borel de Ω en E, que converge casi puntualmente a la función f. Por tanto

$$\Omega' = \{t \in \Omega : (f_K(t))_{K=1}^{\infty} \text{ converge a } f(t)\}$$

cumple $\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$ y por ser μ completa, Ω' es medible.

Dado V abierto en E, tenemos que

$$f^{-1}(V) = \{t \in \Omega : f(t) \in V\} = \{t \in \Omega' : f(t) \in V\} \cup \{t \in \Omega\setminus\Omega' : f(t) \in V\},$$

pero $\{t \in \Omega \setminus \Omega' : f(t) \in V\}$ es un conjunto de medida nula. Comprobemos que $\{t \in \Omega' : f(t) \in V\}$ es medible:

Sea $(\Omega',\Sigma_{|\Omega'},\mu)$ la σ-álgebra en Ω' inducida por (Ω,Σ,μ). La resctricción $f_{K|\Omega'}$ de cada f_K a Ω' es medible Borel ya que dado V abierto en E se tiene

$$(f_{K|\Omega'})^{-1}(V) = \{t \in \Omega' : f_K(t) \in V\} = \Omega' \cap f_K^{-1}(V),$$

éste conjunto pertenece a $\Sigma_{|\Omega'}$.

Como $f_{|\Omega'}$ es límite puntual en Ω' de $f_{K|\Omega'}$, por hipótesis $f_{|\Omega'}$ es medible Borel, por tanto

$$\{t \in \Omega' : f(t) \in V\} = \{t \in \Omega' : f_{|\Omega'}(t) \in V\} = (f_{|\Omega'})^{-1}(V)$$

está en $\Sigma_{|\Omega'}$. Puesto que Ω' pertenece a Σ, $\{t \in \Omega' : f(t) \in V\}$

pertenece también a Σ.

Luego la imagen inversa mediante f de un abierto de E es medible y f es medible Borel.#

Este lema permite utilizar la convergencia puntual en lugar de la casi puntual facilitando la notación.

Proposición 2: Sea $f : (\Omega,\Sigma,\mu) \longrightarrow E$ una función del espacio de medida completo (Ω,Σ,μ) a E, donde E es un espacio topológico que se puede cubrir por una sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ no decreciente de conjuntos de Borel, con $\overline{E_n}$ metrizable, y tal que toda sucesión convergente en E esté contenida en algún E_n. Si f es límite casi puntual de una sucesión de funciones medibles Borel, entonces f es medible Borel.

DEMOSTRACION: Por el lema 1 podemos suponer que la convergencia es puntual.

Sea $(f_N)_{N=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles Borel de Ω en E que converge puntualmente a la función f, y sea

$$\Omega_n = \{t \in \Omega : f_K(t) \in E_n \quad \text{para todo} \quad K\} = \bigcap_{K=1}^{\infty} f_K^{-1}(E_n).$$

Este conjunto es medible, además

$$\Omega = \bigcup_n \Omega_n .$$

Comprobemos que

$$f_{K|\Omega_n} : \Omega_n \longrightarrow \overline{E_n}$$

es medible Borel: Sea V un abierto de $\overline{E_n}$, existe V' abierto en E tal que $V = V' \cap \overline{E_n}$ y $(f_{K|\Omega_n})^{-1}(V) = \{t \in \Omega_n : f_{K|\Omega_n}(t) \in V\} =$
$= \{t \in \Omega_n : f_K(t) \in V\} = \{t \in \Omega_n : f_K(t) \in V' \cap \overline{E_n}\} =$
$= \Omega_n \cap |f_K^{-1}(V' \cap \overline{E_n})|$.

Como Ω_n y $f_K^{-1}(V' \cap \overline{E_n})$ son de Σ, entonces $f_{K|\Omega_n}$ es medible Borel de Ω_n a $\overline{E_n}$.

Si t pertenece a Ω_n,

$$\lim_K f_K(t) = f(t)$$

pertenece a $\overline{E_n}$. La restricción de f a Ω_n, $f_{|\Omega_n}$, es medible Borel de Ω_n en $\overline{E_n}$, ya que es límite puntual de funciones medibles Borel y $\overline{E_n}$ es metrizable.

Probaremos a continuación que $f_{|\Omega_n}$ es de Borel de Ω_n a E: Dado un abierto V en E se tiene:

$$(f_{|\Omega_n})^{-1}(V) = (f_{|\Omega_n})^{-1}\ (V \cap \overline{E_n})$$

que es medible.

Para finalizar veamos que f es medible de Ω en E: Sea V abierto de E

$$f^{-1}(V) = \{t \in \Omega : f(t) \in V\} = \{t \in \bigcup_n \Omega_n : f(t) \in V\} =$$
$$= \bigcup_n \{t \in \Omega_n : f(t) \in V\} = \bigcup_n \{t \in \Omega_n : f(t) \in V \cap \overline{E_n}\} =$$
$$= \bigcup_n f_{|\Omega_n}^{-1}\ (V \cap \overline{E_n})$$

que es medible.#

Aplicando una inducción transfinita podemos definir espacios más generales en los cuales el resultado anterior es cierto.

<u>Definición 3</u>: Sea E un espacio topológico.

a) Se dice que E es de clase F_o si E es metrizable.

b) Se dice que E es de clase F_α, cuando α es un número trosfinito de primera especie, e.d., con precedente, si existe una sucesión $(E_n)^\infty$ no decreciente de espacios de clase $F_{\alpha-1}$ tal que

i) $E = \bigcup_n E_n$

ii) Cada E_n es cerrado en E.

iii) Toda sucesión convergente está contenida en algún E_n.

c) Se dice que E es de clase F_α, cuando α es un número trasfinito de segunda especia, si es de clase $F_{\alpha'}$ para algún $\alpha' < \alpha$.

En el caso en que E sea grupo topológico (resp. e.v.t.), cambiamos la condición ii) por

ii') E_n subgrupo (resp. subespacio vectorial) cerrado en E para todo n.

Proposición 4: Sea f una función de un espacio de medida completa (Ω,Σ,μ) a un espacio topológico E que es límite puntual de una sucesión de funciones medibles Borel $(f_K)_{K=1}^{\infty}$. Si E es de clase F_α entonces f es medible Borel.

DEMOSTRACION: El caso F_o es inmediato. Procedamos por inducción trasfinita. Supongamos que el resultado es cierto para todo $\alpha' < \alpha$. Sea α un número trasfinito de primera especie, si E es de clase F_α, existe una sucesión no decreciente $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de cerrados de clase $F_{\alpha-1}$ tal que

$$E = \bigcup_n E_n.$$

Llamamos

$$\Omega_n = \{t \in \Omega : f_K(t) \in E_n, \quad \text{para todo } K\}$$

y estos conjuntos son medibles. Por la propiedad iii) y la convergencia puntual tenemos que

$$\Omega = \bigcup_n \Omega_n.$$

Si t pertenece a Ω_n, entonces $f(t) = \lim_K f_K(t)$ pertenece a E_n. Demostremos que $f_{|\Omega_n} : \Omega_n \longrightarrow E_n$ es medible Borel. Para K fijo, la aplicación

$$f_{K|\Omega_n} : (\Omega_n, \Sigma_{|\Omega_n}, \mu) \longrightarrow E_n$$

es medible Borel. En efecto, sea V abierto en E_n, entonces existe V' abierto de E tal que $V' \cap E_n = V$, y

$$(f_{K|\Omega_n})^{-1}(V) = \{t \in \Omega_n : f_{K|\Omega_n}(t) \in V\} =$$
$$= \{t \in \Omega_n : f_K(t) \in V' \cap E_n\} = \Omega_n \cap f_K^{-1}(V' \cap E_n),$$

pertenece a $\Sigma_{|\Omega_n}$.

Como $f_{|\Omega_n}$ es el límite puntual en Ω_n de la sucesión de funciones $f_{K|\Omega_n}$, medibles Borel de Ω_n en E_n, y como E_n es de clase $F_{\alpha-1}$, entonces $f_{|\Omega_n}$ es medible Borel de Ω_n a E_n. La función $f_{|\Omega_n}$ también es medible Borel de Ω_n a E: Sea V un abierto en E, se cumple que

$$(f_{|\Omega_n})^{-1}(V) = f_{|\Omega_n}^{-1}(V \cap E_n),$$

pertenece a Σ, pues $\Sigma_{|\Omega_n} \subset \Sigma$ por ser Ω_n medible.

Finalmente comprobemos que f es medible Borel de Ω en E: Dado V abierto en E

$$f^{-1}(V) = \{t \in \Omega : f(t) \in V\} = \bigcup_n \{t \in \Omega_n : f(t) \in V\} =$$
$$= \bigcup_n \{t \in \Omega_n : f_{|\Omega_n}(t) \in V\} = \bigcup_n (f_{|\Omega_n})^{-1}(V)$$

que pertenece a Σ.

Si α es un número trasfinito de segunda especie el resultado es inmediato.#

Corolario: El límite casi puntual de una sucesión de funciones medibles Borel de un espacio de medida completa (Ω,Σ,μ) a E, espacio LF, es medible Borel.

DEMOSTRACION: Basta tener en cuenta que todos los espacios LF son F_1.

Proposición 5: Dado un espacio metrizable E, si S es un subconjunto de E separable, todo subconjunto S_o de S es separable.

DEMOSTRACION: Es conocida.

Proposición 6: Dado un grupo abeliano conmutativo E, de clase F_I, y S un subconjunto separable en E, se tiene que $S \cap E_p$ es separable en E_p para todo E_p de la sucesión (E_n) de 3-b).

DEMOSTRACION: Sea V_α una base de entornos simétricos de 0 en E. Si consideramos los subconjuntos $V_\alpha \cap E_p$, éstos serán una base de la topología relativa, pero como E_p es métrico bastará con una familia numerable V_{α_n} para generar una base en E_p, que será $\{V_{\alpha_n} \cap E_p\}_{n=1}^{\infty}$.

Como S es separable, existe un subconjunto $M = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ denso y numerable, y para todo K se cumple

$$S \subset \bigcup_n (x_n + V_{\alpha_K}).$$

Elegimos los $x_n + V_{\alpha_K}$ tales que

$$(x_n + V_{\alpha_K}) \cap (S \cap E_p) \neq \emptyset,$$

por tanto existe

$$a_{n,K} \in (x_n + V_{\alpha_K}) \cap (S \cap E_p).$$

Comprobemos que el conjunto $A = (a_{n,K})_{K,n}$ es un subconjunto denso en $S \cap E_p$; en efecto, sea s un elemento de $S \cap E_p$, dado V_{α_K}, la densidad de M en S asegura la existencia de x_n tal que

$$s \in x_n + V_{\alpha_K}.$$

Luego

$$(x_n + V_{\alpha_K}) \cap (S \cap E_p) \neq \emptyset$$

y existe $a_{n,K}$ de A de forma que

$$x_n \in a'_{n,K} + V_{\alpha_K}, \quad \text{o bien,} \quad a_{n,K} \in x_n + V_{\alpha_K}$$

por ser los V_α simétricos, y

$$s \in a_{n,K} + V_{\alpha_K} + V_{\alpha_K}.$$

Esto demuestra que A es denso en $S \cap E_p$, ya que para todo entorno V de cero en E_p existen V_{α_n} tal que $(V_{\alpha_n} + V_{\alpha_n}) \cap E_p \subset V$.#

Definición 7: $f : \Omega \longrightarrow E$ es esencialmente separable si existe un conjunto Z con $\mu(Z) = 0$ tal que $f(\Omega \setminus Z)$ está contenido en un subconjunto cerrado y separable de E. (Si E es grupo topológico, ponemos subgrupo cerrado y separable).

Hay que observar que E no tiene porqué ser hereditariamente separable.

Proposición 8: Sea E grupo conmutativo de clase F_1, y f, g dos funciones esencialmente separables de Borel de un espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) a E. Entonces $f+g$ es medible Borel.

DEMOSTRACION: Podemos suponer que f y g son separables.

Si E es de clase F_o es inmediato que $f+g$ es medible Borel.

Sea E de clase F_1, entonces existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ no decreciente de subgrupos cerrados de clase F_0, con las propiedades i), ii), iii) de 3-b). Si llamamos $\Omega_m' = f^{-1}(E_m)$ se tiene que

$$\Omega_1' \subset \Omega_2' \subset \ldots ,$$

los Ω_m' son medibles, y $\Omega = \bigcup_m \Omega_m'$, por tanto dado $\varepsilon > 0$, existe Ω_m' tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega_m') < \varepsilon/2$.

De la misma forma, si $\Omega_m'' = g^{-1}(E_m)$, entonces $\Omega_1'' \subset \Omega_2'' \subset \ldots$, son medibles y $\Omega = \bigcup_m \Omega_m''$, por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe Ω_n'' tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega_n'') < \varepsilon/2$.

Tomando $E_p \supset E_m \cup E_n$ y $\Omega_p = \Omega_m' \cap \Omega_n''$ se cumple

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_p) = \mu(\Omega \setminus (\Omega_m' \setminus \Omega_n'')) < \varepsilon.$$

Llamamos $g_p = g_{|\Omega_p}$ y $f_p = f_{|\Omega_p}$, comprobemos que f_p y g_p son medibles Borel de Ω_p a E_p: Dado V abierto, el conjunto

$$f_p^{-1}(V \cap E_p) = \Omega_p \cap f^{-1}(V \cap E_p)$$

es medible Borel en $(\Omega_p, \Sigma_{|\Omega_p}, \mu)$. De forma análoga se comprueba que g_p es medible Borel de Ω_p a E_p.

Demostramos que g_p y f_p son separables en E_p. Haremos la demostración para f_p pues para g_p se haría de la misma forma.

Por ser f separable, existe un conjunto separable M tal que $f(\Omega) \subset M$; por la proposición 6, $M \cap E_p$ es separable y por la proposición 5, $f_p(\Omega_p)$ es separable en E_p.

Como E_p es metrizable, $f_p + g_p$ es medible Borel de Ω_p a E_p, y también a E.

Por tanto, hemos demostrado que para todo $\varepsilon > 0$, existe Ω_ε "

medible tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ y $(f+g)|_{\Omega_\varepsilon}$ es medible Borel a E.

Escojamos $\varepsilon = 1/n$ y obtenemos una sucesión $\Omega_{1/n}$ que cumple

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_{1/n}) < \varepsilon$$

y $(f+g)|_{\Omega_{1/n}}$ es medible Borel.

Si

$$\Omega' = \bigcup_n \Omega_{1/n}$$

entonces

$$\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$$

Finalmente, $f+g$ es medible Borel, ya que si V es un abierto en E

$$(f+g)^{-1}(V) = \{t \in \Omega' : (f+g)(t) \in V\} \cup \{t \in \Omega \setminus \Omega' : (f+g)(t) \in V\}.$$

Los conjuntos del segundo miembro son medibles, pues

$$\{t \in \Omega' : (f+g)(t) \in V\} = \bigcup_n \left[\Omega_{1/n} \cap (f+g)^{-1}_{|\Omega_{1/n}}(V)\right]$$

y el segundo conjunto está contenido en $\Omega \setminus \Omega'$ que es de medida nula#

Las proposiciones 5 y 6 han sido fundamentales a la hora de reducir el problema de F_1 a F_o. Esto sugiere definir clases de espacio en los cuales se den dichas propiedades.

<u>Definición 9</u>: Sea E un grupo abeliano,

a) Se dice que E es de clase C_o, si E es metrizable.

b) Se dice que E es de clase C_α, con α número trasfinito de primera especie, si es de clase F_α (es decir cumple i, ii', iii de 3b), además cada E_n es de clase $C_{\alpha-1}$, y

iv) Dado un conjunto cerrado S de E separable, para todo n natrual $S \cap E_n$ es separable en E_n.

c) Se dice que E es de clase C_α, con α un número trasfinito de segunda especie, si es de clase $C_{\alpha'}$, con $\alpha' < \alpha$.

Proposición 10: Todo grupo abeliano de clase F_1 es de clase C_1.

DEMOSTRACION: Es inmediato a partir de la proposición 6.

Proposición 11: Sea E un grupo conmutativo de clase C_α y sean f y g dos funciones esencialmente separables de Borel de un espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) a E. Entonces $f+g$ es medible Borel.

DEMOSTRACION: El caso C_0 y C_1 se ha demostrado en la proposición 8. Como allí podemos suponer f y g separables.

Procedamos por inducción trasfinita. Supongamos que se cumple para todo $\alpha' < \alpha$. Si E es de clase C_α con α un número trasfinito de primera especie, entonces existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ no decreciente de subgrupos cerrados de clase $C_{\alpha-1}$ con las propiedades 3,b-i, 3,b-ii'), 3,b-iii), q-iv).

Sea $\Omega'_m = f^{-1}(E_m)$ entonces $\Omega'_1 \subset \Omega'_2 \subset \dots$ y los Ω'_m son medibles, además

$$\Omega = \bigcup_m \Omega'_m.$$

Luego dado $\varepsilon > 0$ existe Ω'_m tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega'_m) < \varepsilon/2$.

De la misma forma si $\Omega''_m = g^{-1}(E_m)$ se tiene que $\Omega''_1 \subset \Omega''_2 \subset \dots$, son medibles y que

$$\Omega = \bigcup_m \Omega''_m,$$

por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe Ω''_n tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega''_n) < \varepsilon/2$.

Si tomamos $E_p \supset E_m \cup E_n$ y $\Omega_p = \Omega'_m \cap \Omega''_n$ se cumple que

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_p) < \varepsilon$$

Es facil comprobar que $f_p = f_{|\Omega_p}$ y $g_p = g_{|\Omega_p}$ son medibles Borel de Ω_p a E_p. g_p y f_p son separables en E_p, veámoslo para f_p, la demostración para g_p se haría de idéntica forma: Por hipótesis f es separable en E, luego existe un conjunto M cerrado y separable tal que $f(\Omega)$ M. Por la condición 9-b,i), $M \cap E_p$ es separable en E_p para la topología relativa, pero

$$f_p(\Omega_p) = f(\Omega_p) \subset f(\Omega) \cap E_p \subset M \cap E_p,$$

y por consiguiente f_p es separable esencialmente de Ω_p a E_p, y como E_p es de clase $C_{\alpha-1}$

$$f_p + g_p : \Omega_p \longrightarrow E_p$$

es medible Borel de Ω_p en E_p. También es medible Borel de Ω_p en E.

La proposición finaliza de la misma forma que la del caso F_1 (proposición 8).

Si E es de clase C_α con α un número trasfinito de segunda especie, el resultado es inmediato.#

Proposición 12: (Teorema de Egorov para la medibilidad Borel en grupos métricos). Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita y completa y E un grupo metrizable conmutativo (e.d., de clase C_o). Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ esencialmente separables de Ω en E, que converge casi puntualmente a f, entonces converge casi uniformemente.

DEMOSTRACION: Podemos suponer la convergencia puntual.

Probemos primeramente que f es esencialmente separable.

Cada f_n es esencialmente separable, y existe para cada n un conjunto Z_n de medida cero tal que $f_n(\Omega \setminus Z_n)$ esté contenido en un conjunto M_n cerrado y separable en E. Tomemos

$$Z = \bigcup_n Z_n$$

entonces $\mu(Z) = 0$ y

$$f_n(\Omega \setminus Z) \subset f_n(\Omega \setminus Z_n) \subset M_n$$

por tanto

$$f_n(\Omega \setminus Z) \subset \overline{\bigcup_n M_n} \quad \text{y} \quad \bigcup_n f_n(\Omega \setminus Z) \subset \bigcup_n \overline{M_n}$$

además $\overline{\bigcup_n M_n}$ es cerrado y separable en E.

Si t pertenece a $\Omega \setminus Z$, $f(t)$ pertenece a $\overline{\bigcup_n M_n}$ ya que

$$f(t) = \lim_n f_n(t),$$

luego f es esencialmente separable. (Observar que no se usa que E sea metrizable).

Sea

$$X_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \{t : f_i(t) - f(t) \in B(0,1/m)\}$$

Estos conjuntos son medibles y la sucesión para m fijo es no decreciente. Como la sución $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f en Ω se tiene que

$$\lim_n X_n^m = \Omega$$

para cada $m=1,2,\ldots$ De aquí deducimos que

$$\lim_n \mu(\Omega \setminus X_n^m) = 0$$

y por tanto para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero positivo $n_o = n_o(m)$ tal que

$$\mu(\Omega \setminus X_{n_o(m)}^m) < \varepsilon/2^m$$

El conjunto

$$\Omega' = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus X^{m}_{n_o(m)})$$

es medible $\Omega' \subset \Omega$ y

$$\mu(\Omega') = \mu(\bigcup_{m=1}^{\infty} (\Omega \setminus X^{m}_{n_o(m)})) \leq \Sigma_{m=1}^{\infty} \mu(\Omega \setminus X^{m}_{n_o(m)}) < \varepsilon$$

Entonces para todo

$$t \in \Omega \setminus \Omega' = \bigcap_{m=1}^{\infty} X^{m}_{n_o(m)}$$

se tiene

$$f_i(t) - f(t) \in B(0,1/m) \quad \text{si} \quad i \geq n_o(m)$$

lo que prueba la convergencia uniforme en $\Omega \setminus \Omega'$.#

Proposición 13: (Teorema de Egorov para la medibilidad Borel en grupos abelianos de clase C_α).

Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa, y E un grupo conmutativo de clase C_α. Dada una sucesión de funciones $(f_N)_{N=1}^{\infty}$ medibles Borel esencialmente separables de Ω en E, que converge casi puntualmente a una función f. Entonces f es medible Borel, esencialmente separable y la convergencia es casi uniforme.

DEMOSTRACION: f es medible Borel por la proposición 4; f es esencialmente separable por la primera parte de la demostración de la proposición 12.

Veamos que la convergencia es casi uniforme.

El resultado es cierto cuando E es de clase C_o, ya que es precisamente la proposición 12.

Procedamos por inducción trasfinita. Supongamos que la afirmación es cierta para todo $\alpha' < \alpha$. Sea E de clase C_α, con α un número trasfinito de primera especie, entonces existe una sucesión no decreciente $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subgrupos cerrados de clase $C_{\alpha-1}$, que cumple

$$E = \bigcup_n E_n .$$

Sea

$$\Omega_n = \{t \in \Omega : f_K(t) \in E_n \quad \text{para todo} \quad K\}$$

de donde

$$\Omega = \bigcup_n \Omega_n ,$$

si suponemos que la convergencia es puntual ya que como el espacio es de medida completa no quita generalidad, y además

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots .$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe n_o tal que si $n \geq n_o$

$$\mu(\Omega_n) > \mu(\Omega) - \varepsilon/2 .$$

Las restricciones de f_K y f a Ω_n,

$$f_{K|\Omega_n} , f_{|\Omega_n} : \Omega_n \longrightarrow E_n ,$$

son esencialmente separable y $f_{K|\Omega_n}$ converge a $f_{|\Omega_n}$ casi uniformemente en E_n, e.d., para todo $\varepsilon > 0$ existe $\Omega_{n,\varepsilon} \subset \Omega_n$ medible tal que en $\Omega_{n,\varepsilon}$, $f_{K|\Omega_n}$ converge a $f_{|\Omega_n}$ uniformemente en E_n y $\mu(\Omega_n \setminus \Omega_{n,\varepsilon}) < \varepsilon/2$, por tanto $f_{N|\Omega_{n,\varepsilon}}$ converge uniformemente a $f_{|\Omega_{n,\varepsilon}}$ en E y

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_{n,\varepsilon}) < \varepsilon$$

Si E es de clase C_α con α un número trasfinito de segunda especie el resultado es inmediato.//

A partir de aquí quitaremos la hipótesis referente a la separbilidad esencial a costa de la cardinalidad de los espacios de medida y topológico. La generalidad de los resultados dependerá de la axiomática de los conjuntos que utilicemos, según la discusión que a este res pecto hicimos al comienzo de la memoria.

<u>Lema 14</u>: Si E es un grupo conmutativo de clase F_α y S un subgrupo en E, entonces S es de clase F_α con la topología relativa.

DEMOSTRACION: Para $\alpha = 0$ el resultado es inmediato ya que S es metrizable. Procedamos por inducción trasfinita. Supongamos que el resultado es cierto para todo α' menor que α.

Sea α un número trasfinito de primera especie, si E es de clase F_α entonces $E = \bigcup_n E_n$ donde cada E_n es un subgrupo cerrado y de clase $F_{\alpha-1}$. Es evidente que:

a) $S = \bigcup_n (S \cap E_n)$

b) $(S \cap E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subgrupos cerrados en S no decreciente.

c) Toda sucesión convergente en S estará en algún $S \cap E_n$.

d) S E_n es un subgrupo de E_n y por la hipótesis de inducción trasfinita de clase $F_{\alpha-1}$, para todo n.

Si α es un número trasfinito de segunda especie el resultado es inmediato.#

<u>Lema 15</u>: Si E es un grupo conmutativo de clase C_α y S es un subgrupo en E, entonces S es declase C_α para la topología relativa.

DEMOSTRACION: Para $\alpha = 0$ la demostración es inmediata. Procedamos por inducción trasfinita. Supongámoslo cierto para $\alpha' < \alpha$.

Si α es de primera especie, es decir, tiene precedente $\alpha-1$, dados, S subgrupo de E y $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de subgrupos de E de clase $C_{\alpha-1}$, entonces

$$S = \dot{\bigcup_n} (S \cap E_n).$$

Los $S \cap E_n$ son de clase $C_{\alpha-1}$ por la inducción trosfinita, y cumplen las propiedades que hacen de S un grupo de clase F_α. Falta pues comprobar la propiedad 9-iv). Sea M un conjunto cerrado y separable en S, para todo n vamos a verificar que $M \cap (S \cap E_n)$ es separable en $S \cap E_n$.

Si M es separable en S, lo es en E y por ser este último de clase $C_{\alpha-1}$, $M \cap E_n$ es separable en E_n, es decir, existe D denso y contable en $M \cap E_n$ y por tanto

$$M \cap E_n \subset \overline{D}^{E_n},$$

ahora bien

$$M \cap E_n = M \cap (S \cap E_n) \subset \overline{D}^{E_n} \cap S = \overline{D}^{E_n} \cap (S \cap E_n)$$

luego

$$M \cap (S \cap E_n) \text{ es separable en } S \cap E_n.$$

Si α es de segunda especie, E es de $C_{\alpha'}$ para algún $\alpha' < \alpha$ y el resultado es inmediato.#

<u>Proposición 16</u>: Sea E un grupo conmutativo de clase C_α. Sean f y g dos funciones medibles Borel de un espacio de medida finita y completa (Ω, Σ, μ) a E. Si el $*$-peso de E o el cardinal de 2^Ω es de medida cero, entonces $f+g$ es medible Borel.

DEMOSTRACION: Estudiaremos primero el caso en que E tiene $*$-peso de medida cero. El teorema 1 de Stone |39| resuelve el caso en el cual E es C_o. Procedamos por inducción trosfinita, supongamos que el re sultado es cierto para todo α' menor que α.

Sea E un espacio de clase C_α con α un número trasfinito de primera especie. Existe una sucesión no decreciente $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de subgrupos de clase $C_{\alpha-1}$ tales que

$$E = \bigcup_n E_n .$$

Sea $\Omega'_m = f^{-1}(E_m)$, entonces $\Omega'_1 \subset \Omega'_2 \subset \ldots$ y los Ω'_m son medibles. Además

$$\Omega = \bigcup_m \Omega'_m ,$$

luego dado $\varepsilon > 0$ existe Ω'_m tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega'_m) < \varepsilon/2$.

De la misma forma, si $\Omega''_m = g^{-1}(E_m)$ se tiene que $\Omega''_1 \subset \Omega''_2 \subset \ldots$ y los Ω''_m son medibles. Además

$$\Omega = \bigcup_m \Omega''_m$$

por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe Ω''_n tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega''_n) < \varepsilon/2$.

Tomando $E_p \supset E_m \cup E_n$ y $\Omega_p = \Omega'_m \cap \Omega''_n$ se cumple que $\mu(\Omega \setminus \Omega_p) < \varepsilon$. Llamamos $g_p = g_{|\Omega_p}$ y $f_p = f_{|\Omega_p}$. En la proposición 8 comprobamos que g_p y f_p son medibles Borel de Ω_p a E_p. Como E_p es de clase $C_{\alpha-1}$ y su $*$-peso es de medida cero entonces g_p+f_p es medible Borel de Ω_p a E_p y también a E.

La demostración finaliza de la misma forma que la proposición 8.

Si E es de clase C_α con α un número trasfinito de segunda especie el resultado es inmediato.

Estudiemos el caso para el cual 2^Ω tiene cardinal de medida cero. Distingamos dos situaciones:

a) $Cd(\Omega) \leq \aleph_0$, entonces las funciones son esencialmente separables, y la demostración se reduce a la proposición 11.

b) $Cd(\Omega) > \aleph_0$, entonces el peso de $f(\Omega)$ y el de $g(\Omega)$ son menores o iguales que el cardinal de Ω. Si llamamos Y al subgrupo cerrado engendrado por $f(\Omega) \cup g(\Omega)$, entonces el peso de Y es menor o igual que el cardinal de Ω y el $*$-peso de Y, es menor o igual que $Cd(2^{\Omega})$. Estamos por tanto en la primera parte del teorema.#

Nota: Si $Cd(\Omega) > 2^{\aleph_0}$ entonces la hipótesis "2^{Ω} tiene cardinal de medida cero" es equivalente a "Ω tiene cardinal de medida cero".

Proposición 17: Sea E un grupo conmutativo de clase C_{α} y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles Borel de (Ω,Σ,μ), espacio de medida finita y completa a E, tal que converge casi puntualmente a una función f. Si el $*$-peso de E o el cardinal de 2^{Ω} es de medida cero entonces la convergencia es casi uniforme.

DEMOSTRACION: El teorema 1 de Stone |39| resuelve el caso en que E es C_0, ya que en espacios métricos tener $*$-peso de medida cero es equivalente a tener peso de medida cero. (Como $Cd(\Omega) < Cd(2^{\Omega})$ si éste tiene medida cero, el primero tendrá medida cero, basándonos en el hecho trivial de que si $m < n$ y n es de medida cero entonces n es de medida cero).

Si el espacio de clase C_{α} la demostración es análoga a la efectuada en la proposición 13.#

Como comentabamos al principio del capítulo la hipótesis de cardinalidad que hemos usado en la segunda parte no es imprescindible pues con las técnicas de los conjuntos analíticos recientemente se han obtenido teoremas que permiten asegurar que si el espacio de medida es absolutamente analítico y el espacio de llegada es un grupo con mutativo metrizable entonces la suma de dos funciones medibles Borel es medible Borel.

Veamos los resultados necesarios.

<u>Proposición a)</u> (Fremlin): Dado un espacio medible (x,B) son equivalentes:

1. Siempre que Y sea un espacio discreto y f y g sean aplicaciones medibles Borel de X en Y, entonces $(f,g) : X \longrightarrow Y \times Y$ es medible Borel respecto a la topología discreta de $Y \times Y$.

2. Siempre que Y, Z sean espacios metrizables y las aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$, $g : X \longrightarrow Z$ sean medibles Borel, entonces $(f,g) : X \longrightarrow Y \times Z$ es medible Borel.

3. Siempre que E sea un espacio de Banach y f,g sean aplicaciones medibles Borel de X en E, entonces $f+g : X \to E$ es medible.

DEMOSTRACION: Ver |39|.

<u>Proposición b)</u> (Preiss): Si X es un espacio métrico absolutamente analítico, B es su familia de conjuntos de Borel y E un espacio de Banach, entonces toda función Borel de X en E es de clase acotada.

DEMOSTRACION: Ver |29|

<u>Proposición c)</u>: Sean f y g dos funciones medibles Borel de clase acotada de X, espacio métrico absolutamente analítico a un espacio métrico Y, entonces la aplicación $(f,g) : X \longrightarrow Y \times Y$ es medible Borel.

Teorema 18: Si X es un espacio métrico absolutamente analítico, B es la clase de los conjuntos de Borel de X, e Y es un grupo topológico conmutativo metrizable, entonces la suma de dos funciones medibles Borel es medible Borel.

DEMOSTRACION: Por la proposición a) bastará comprobar que dado un espacio de Banach Y, la suma de dos funciones medibles Borel es medible Borel.

Sean f, g dos funciones medibles Borel de (X,B) en Y, por la proposición b) son de clase acotada, y por la proposición c)

$$(f,g) : (X,B) \longrightarrow Y \times Y$$

es medible Borel. Pero por ser Y un grupo conmutativo topológico entonces

$$f+g : X \longrightarrow Y$$

es medible Borel.#

Teorema 19: Sea (X,B,μ) un espacio de medida finita, donde X es un espacio métrico absolutamente analítico. Sea E un grupo conmutativo metrizable, y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles Borel de X en E, puntualmente convergente a una función f. Entonces f es medible Borel, y la convergencia es uniforme.

DEMOSTRACION: La primera afirmación es inmediata.

La demostración es idéntica a la de la proposición 12 con la salvedad de que allí usabamos que las funciones fuesen esencialmente separables para asegurar que los conjuntos X_n^m fuesen medibles y en el caso actual usamos el teorema 18.#

Restringiendo la clase de las funciones podemos obtener resultados análogos consiguiendo una mayor generalidad para el espacio de medida. Las definiciones son las introducidas en el capítulo primero. Enunciaremos las dos proposiones básicas de Hausell utilizadas en el teorema de Egorov que a continuación se expone.

Los espacios topológicos utilizados aquí cumplen que todo abierto es un F_σ.

Proposición d) (Hausell): Sean X un espacio topológico, Y un espacio métrico, Σ la familia de aplicaciones σ-discretas de X a Y. Entonces $\Sigma \cap \emptyset_\alpha^*$ coincide con la familia de todas las aplicaciones de Borel de clase α, respectivamente $\alpha+1$, de acuerdo con que α sea finita o infinita, $(\alpha \geq 1)$.

En particular, si X es un espacio métrico absolutamente analítico, entonces el teorema es cierto sin referencia a la σ-discrección.//

DEMOSTRACION: Ver |15|.

Proposición e) (Hausell): Si X es un espacio topológico, Y grupo conmutativo topológico metrizable y f y g dos funciones σ-discretas de Borel de clase α, entonces $f+g$ es de Borel de clase α y σ-discreta.

DEMOSTRACION: |. 15 . Proposición 3, Corolario 1|.

Teorema 20: Sea X un espacio topológico, B su σ-álgebra de Borel y μ una medida en B finita. Sea Y un grupo conmutativo metrizable. Dada una sucesión $f_n : X \to Y$ de funciones σ-discretas de Borel de clase α, convergentes puntualmente a una función f σ-discreta, entonces la convergencia es casi uniforme.

DEMOSTRACION: Por la proposición b), $f_n - f$ es una función de Borel σ-discreta que converge puntualmente a cero, y es de clase $\alpha+1$, ya que f será de clase $\alpha+1$.

La demostración es idéntica a la demostración de la proposición 12.

Nota: El contraejemplo de Fernández-Asenjo |10| demuestra que si el espacio no es métrico no tiene porque cumplirse el Teorema de Egorov pues tomando $\mathbf{R}^{[0,1|} = Y$, $X = [0,1)$ con la σ-álgebra de Lebesgue obtiene una función que es límite puntual de una sucesión de funciones continuas y que no es límite casi uniforme. Asi mismo, dado que $\mathbf{R}^{[0,1)}$ es tonelado y bornológico no tiene porque cumplirse tampoco el teorema de Egorov para estos casos.

CAPITULO V

EN ESPACIOS DE BANACH

Vamos a estudiar el Teorema de Egorov y las relaciones entre los distintos tipos de medibilidades de un espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) a E un espacio de Banach con la topología $b\omega(E)$.

Proposición 1: Sea E un espacio de Banach, tal que E' es separable y (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa. Entonces el conjunto de las funciones de Borel de Ω en $(E,\sigma(E,E'))$ es cerrado para la convergencia casi puntual y cumple además el Teorema de Egorov.

DEMOSTRACION: Por ser E' separable, existe una topología metrizable τ en E, tal que induce la topología débil sobre los acotados. Sea f el límite casi puntual débil de una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $\sigma(E,E')$-medibles Borel, entonces f es $\sigma(E,E')$-medible Borel, ya que $(E,\sigma(E,E'))$ es de clase F_1 (como espacio topológico) pues

$$E = \bigcup_n \bar{B}(0,n),$$

y los $\bar{B}(0,n)$ son acotados en $(E, \| . \|)$ y por tanto metrizables y cerrados en $(E,\sigma(E,E'))$.

Consideremos los conjuntos medibles

$$A_k = \{t \in \Omega : f_n(t) \in \bar{B}(0,k) \quad \text{para todo} \quad n\}.$$

Por la convergencia casi puntual

$$\Omega = \bigcup_k A_k \cup Z \qquad \text{con} \qquad \mu(Z) = 0$$

y $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_o tal que

$$\mu(A_{n_o}) > \mu(\Omega) - \varepsilon/2$$

Las funciones de la sucesión aplican A_{n_o} en $\overline{B}(0,n_o)$, luego

$$f(A_{n_o}) \subset \overline{B}(0,n_o)$$

ya que $\overline{B}(0,n_o)$ es cerrado en la topología débil.

Entonces la restricción de $f_n - f$ a A_{n_o}

$$(f_n - f)|_{A_{n_o}} : A_{n_o} \longrightarrow \overline{B}(0,2n_o)$$

será medible en $\sigma(E,E')$ pues $f_n - f$ es medible en la topología (que es metrizable y separable) y $(f_n - f)|_{A_{n_o}}$ está acotada.

Como E' es separable, $(E \; \|.\|)$ es separable |22. Teorema 4.5| y (E,τ), $(E,\sigma(E,E'))$ son separables, por la proposición IV.12, f_n converge casi uniformemente en E_{n_o}, considerando en E la topología τ. Pero entonces también en $(E,\sigma(E,E'))$.#

El teorema de Stegall |37|, que caracteriza a los espacios cuyos duales tienen la propiedad de Radón-Nikodym como aquellos en los cuales el dual de cualquier subespacio separable es separable, nos permite ampliar el resultado anterior.

__Proposición 2__: Sea E un espacio de Banach tal que E' tiene P.R.N. y (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa. Entonces el conjunto de funciones de Borel de Ω a E son esencialmente separables es cerrado para la $\sigma(E,E')$-convergencia casi puntual de sucesiones y cumple el teorema de Egorov.

DEMOSTRACION: Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones esencialmente separables y $\sigma(E,E')$ - casi puntualmente convergente a f. Exi conjunto Z de medida nula tal que, en $\Omega \setminus Z$, la convergencia de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es puntual y $f_n(\Omega \setminus Z)$ es separable en $(E, \| . \|)$ para todo n.

Si llamamos

$$X = \overline{|\bigcup_n f_n(\Omega, Z)|}^{\| . \|}$$

a la clausura en $(E, \| . \|)$ del subespacio engendrado por $\bigcup_n f_n(\Omega \setminus Z)$, tenemos que X es un subespacio cerrado en $(E, \| . \|)$ y por tanto será un subespacio cerrado en $(E, \sigma(E,E'))$.

X', dual continuo de X, será separable por el teorema de Stegall |22|, entonces

i) $f_n, f : \Omega \setminus Z \longrightarrow (X, \sigma(X,X'))$ son de Borel por la proposición 1.

ii) f_n converge $\sigma(X,X')$-puntualmente a f en Ω Z.

Como por la proposición 1, f_n converge $\sigma(X,X')$-casi uniformemente a f,

$$f_n : \Omega \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$$

converge a f $\sigma(E,E')$-casi uniformemente.#

En el libro de Day |5| se estudian topologías más finas que las débiles que en general no son vectoriales pero que coinciden sobre los acotados con las débiles, de forma rigurosa:

Definición 3: Sea $(E, \| . \|)$ un espacio de Banach, la topología bw es la más fina que coincide sobre los acotados con $\sigma(E,E')$. (La llamaremos $b\omega(E)$).

Toda la problemática de esta topología puede verse en el artículo de Wheler |44|. A pesar de su dificultad su σ-álgebra de Borel se comporta de forma muy sencilla como vemos en el lema siguiente:

Lema 4: Sea E un espacio de Banach, entonces

$$\text{Borel } (E, b\omega) = \text{Borel } (E, \sigma(E,E')).$$

DEMOSTRACION: Como $b\omega(E)$ es más fina que $\sigma(E,E')$ entonces

$$\text{Borel } (E,\ b\omega) \supset \text{Borel } (E,\sigma(E,E'))$$

Sea F cerrado en $b\omega(E)$, entonces

$$F = \bigcup_n \left| F \cap \overline{B}(0,n) \right|$$

pero $F \cap \overline{B}(0,n)$ es cerrado en $\sigma(E,E')$ de donde F es de Borel en $\sigma(E,E')$ con lo cual

$$\text{Borel } (E,b\omega) \subset \text{Borel } (E,\sigma(E,E')).\#$$

Teorema 5: Sea E un espacio de Banach tal que E' tiene P.R.N. y (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa. Entonces el conjunto de las funciones $\sigma(E,E')$-medibles Borel esencialmente separables de Ω a E cumple el teorema de Egorov para la $b\omega(E)$-convergencia casi uniforme.

DEMOSTRACION: Por el lema 4 las funciones $\sigma(E,E')$-medibles Borel y los $b\omega(E)$-medibles Borel coinciden. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones esencialmente separables y $b\omega(E)$-medibles Borel convergente debilmente casi puntualmente a la función f. Por la proposición 2 f es $b\omega$-medible y $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $\sigma(E,E')$-casi uniformemente a f, esto es, para todo $\varepsilon > 0$, existe Ω_ε medible tal que f_n converge $\sigma(E,E')$-uniformemente en Ω_ε y $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon/2$.

Por otra parte, para todo $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ y Ω^ε medible tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega^\varepsilon) < \varepsilon/2$ y

$$f_n, f_n : \Omega^{\varepsilon} \longrightarrow B(0,K)$$

si tomamos

$$\Omega' = \Omega_{\varepsilon} \cap \Omega^{\varepsilon}$$

entonces $\mu(\Omega \setminus \Omega') < \varepsilon$ y f_n converge $\sigma(E,E')$-uniformemente en Ω' a f, pero sobre Ω' las funciones f_n y f están acotadas y f_n converge $b\omega(E)$-uniformemente a f.#

La herramienta básica en el estudio que nos proponemos es un resultado reciente de Edgar aparecido en 1977 en |9|.

<u>Teorema</u> (a): Sea $f : \Omega \longrightarrow E$ una función escalarmente medible de un espacio de probabilidad (Ω,Σ,μ) a un espacio de Banach E. Entonces f es débilmente equivalente a una función medible Bochner si y sólo si la medida imagen μ_f es rígida en $(E,\sigma(E,E'))$.

En nuestra notación una función es medible Bochner si es $\mu - \|\cdot\|$-medible.

<u>Proposición 6</u>: Sea E un espacio reflexivo y (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa. Si una función es $\sigma(E,E')$-medible Borel de Ω en E, entonces la medida imagen μ_f es rígida y por tanto f es débilmente equivalente a una función $\mu - \|\cdot\|$-medible.

DEMOSTRACION: Sea f una función medible Borel de Ω en $\sigma(E,E')$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe n_o tal que

$$\mu_f(\bar{B}(0,n_o)) > \mu_f(E) - \varepsilon$$

Como $\bar{B}(0,n_o)$ es $\sigma(E,E')$-compacto, μ_f es rígida y por el teorema (a) f es débilmente equivalente a una función F $\mu-\|\cdot\|$-medible, es decir, para todo x' de E', $x' \circ f = x' \circ F$ en casi todo Ω.#

Proposición 7: Si E es un espacio de Banach, toda función débilmente equivalente a una función μ-$\|\cdot\|$-medible es $\bar{\mu}$-$\sigma(E,E')$-medible. ((Ω,Σ,μ) se supone como siempre, finita y completa).

DEMOSTRACION: Sea $f : (\Omega,\Sigma,\mu) \to E$ una función débilmente equivalente a una función μ-$\|\cdot\|$-medible. f es escalarmente medible por ser (Ω,Σ,μ) completo y para toda x' de E' y todo x de E se tiene que $\langle x', f-x\rangle$ es medible. Falta comprobar que f es ω-esencialmente precompacta.

Sea V un entorno de cero en $(E,\sigma(E,E'))$ de la forma

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} x_i'^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon),$$

donde x_i' pertenece a E'. Existe un conjunto Z de medida nula tal que en $\Omega \setminus Z$

$$\langle x_i', f\rangle = \langle x_i', F\rangle$$

para todo $i=1,\dots,n$. Entonces

$$f(t) - F(t) \in \bigcap_{i=1}^{n} x_i'^{-1}(0).$$

Como F es μ-$\|\cdot\|$-medible, existe Z' con medida nula tal que $F(\Omega \setminus Z')$ es esencialmente separable, luego podemos encontrar un conjunto M contable tal que

$$F(t) \in M + \bigcap_{i=1}^{n} x_i'^{-1}(-\varepsilon/2, \varepsilon/2) \quad \text{para todo } t \text{ de } \Omega \setminus Z'.$$

Si tomamos $Z^* = Z \cup Z'$, y para todo t de $\Omega \setminus Z^*$

$$f(t) \in F(t) + \bigcap_{i=1}^{n} x_i'^{-1}(0) \subset M + \bigcap_{i=1}^{n} x_i'^{-1}(-\varepsilon/2,\varepsilon/2) +$$

$$+ \bigcap_{i=1}^{n} x_i'^{-1}(-\varepsilon/2,\varepsilon/2) \subset M + \bigcap_{i=1}^{n} x_i'^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon) = M + V.$$

De esto se deduce que f es $\bar{\mu}$-$\sigma(E,E')$-medible, pues los entornos V correspondientes a todos los conjuntos finitos de formas en E' y todos los $\varepsilon > 0$, forman una base de entornos de cero en $(E,\sigma(E,E'))$.#

En clases de espacios de Banach más generales que los W.C.G. se pueden obtener caracterizaciones de funciones medibles Borel. Vamos a dar dos definiciones equivalentes de espacio de Banach medibles compactos.

<u>Definición 8</u>: a) El espacio E de Banach se dice medible compacto si toda medida finita en $(E,\sigma(E,E'))$ es τ-smooth.

a') El espacio de Banach se dice medible compacto si y sólo si para todo espacio de medida finita (Ω,Σ,μ) se tiene que cada función escalarmente medible f de Ω en E es débilmente equivalente a una función μ- $\|.\|$ -medible.

Esta clase es muy amplia pues engloba a los espacios W.C.G., reflexivos, separables, $(E,\sigma(E,E'))$ Lindelof, $l'(\Gamma)$ con Γ un conjunto de cardinal de medida cero y a los espacios de Banach PIP y PRN. La demostración de este hecho está en un amplio artículo de Edgar |9|.

Nota: Dado un espacio de medida finito (Ω,Σ,μ), E un espacio de Banach. Se dice que E es μ-medible compacto si cada función escalarmente medible $f : \Omega \to E$ es débilmente equivalente a una función μ- $\|.\|$ -medible.

Según ésto, un espacio de Banach es medible compacto si es μ-medible compacto para toda (Ω,Σ,μ) espacio de medida finita.

Proposición 9: Sea E un espacio de Banach. Si E es μ-medible compacto para todo espacio de medida (Ω,Σ,μ) finita y completa, entonces

$$\bar{M}(\Sigma,\mu,(E,\sigma(E,E'))) = E(\Omega,\Sigma,\mu,E)$$

donde $E(\Omega,\Sigma,\mu,E)$ es el conjunto de las funciones débilmente equivalentes a una función μ-$\|.\|$-medible.

DEM: Sea f una función $\ddot{\mu}$-$\sigma(E,E')$-medible, entonces es escalarmente medible. Por ser E μ-medible compacto, f es debilmente equivalente a una función μ-$\|.\|$-medible.

Si f es debilmente equivalente a una función μ-$\|.\|$-medible, por la proposición 7, f es $\bar{\mu}$-$\sigma(E,E')$-medible. Con esto queda demostrado la proposición.#

Proposición 10: Sea E un espacio de Banach tal que para todo espacio de medida finita y completa (Ω,Σ,μ) se tiene que

$$E(\Omega,\Sigma,\mu,E) = F_{Baire}(E,\sigma(E,E'))$$

entonces E es medible compacto.

DEMOSTRACION: Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita. $(\Omega,\hat{\Sigma},\hat{\mu})$ será la compleción del espacio de medida (Ω,Σ,μ).

Dada una función f escalarmente medible de (Ω,Σ,μ) a E, f es escalarmente medible de $(\Omega,\hat{\Sigma},\hat{\mu})$ a E. Por hipótesis existe una función $F : \Omega \longrightarrow E$ $\hat{\mu}$-$\|.\|$-medible tal que para todo x' de E'

$$\langle x',f\rangle = \langle x',F\rangle \quad \text{en casi todo } \Omega.$$

Por el teorema de Pettis F es μ-$\|.\|$-medible ya que $\langle x'F\rangle$ es μ-medible, y F es esencialmente separable.

Por tanto E es μ-medible compacto para todo (Ω,Σ,μ), luego E es medible compacto.#

Esta proposición en definitiva da de nuevo una equivalencia de la definición de espacio medible compacto en la que interviene sólo los espacios de medidas finitos y completos.

Proposición 11: Sea E un espacio de Banach separable. Entonces el conjunto de las funciones medibles Borel de Ω en $(E',\sigma(E',E))$ es cerrado para la convergencia $\sigma(E',E)$-casi puntual.

DEMOSTRACION: Si consideramos en E' las bolas cerradas $\bar{B}'(0,n)$, de centro cero y radio n natural tenemos

i) $E' = \bigcup_n \bar{B}'(0,n)$

ii) $\bar{B}'(0,n)$ es cerrado para la topología $\sigma(E',E)$

iii) $\bar{B}'(0,n)$ es metrizable para la topología $\sigma(E',E)$

iv) Dada $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en $\sigma(E',E)$, es acotada es norma y por tanto está en algún $\bar{B}'(0,n)$.

Por tanto $(E',\sigma(E',E))$ es de clase F_1 como espacio topológico y el límite casi puntual de una sucesión de funciones de Borel es de Borel según la proposición IV.4.#

Lema 12: Sea $(E,\|.\|)$ un espacio de Banach separable y $\|.\|_o$ la suma que induce sobre cada acotado de E' la topología débil, entonces

$$\text{Borel }(E',\sigma(E',E)) = \text{Borel }(E',\|.\|_o)$$

DEMOSTRACION: Sean $\bar{B}'(0,n)$ las bolas centradas en cero y de radio n en la norma $\|\cdot\|'$, es evidente que

$$E' = \bigcup_n \bar{B}'(0,n)$$

Sea F un cerrado en $(E', \|\cdot\|_0)$, tenemos que

$$F = \bigcup_n (F \cap \bar{B}'(0,n))$$

y como sobre los acotados de $(E', \|\cdot\|')$ las topologías $\sigma(E',E)$ y $\|\cdot\|_0$ coinciden y $F \quad \bar{B}'(0,n)$ es cerrado en $(E',\sigma(E',E))$ ya que F es cerrado en $(E', \|\cdot\|_0)$ y acotado en $(E', \|\cdot\|')$. De aquí F es de Borel en $(E',\sigma(E',E))$ y

$$\mathrm{Borel}(E', \|\cdot\|_0) \quad \mathrm{Borel}\,(E',\sigma(E',E)).$$

De la misma forma obtenemos la inclusión contraria.#

Teorema 13: Sea $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach separable y (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y completa. Si el cardinal de Ω o el peso de $(E', \|\cdot\|')$ es de medida cero o Ω es absolutamente analítico entonces las funciones medibles Borel de Ω en $(E',\sigma(E',E))$ cumplen el Teorema de Egorov es decir, el límite $\sigma(E',E)$-casi puntual de una sucesión de funciones es $\sigma(E',E)$-casi uniforme.

DEMOSTRACION: Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones $\sigma(E',E)$-medibles Borel de Ω en E que converge $\sigma(E',E)$-casi puntualmente a f. Por la proposición 11, f es $\sigma(E',E)$-medible Borel.

Si el peso de $(E', \|\cdot\|')$ es de medida cero, tanto $(E',\sigma(E',E))$ como $(E, \|\cdot\|_0)$ tienen peso de medida cero ya que son topológicos más débiles. Como $(E', \|\cdot\|_0)$ es métrico, según la suma de dos funciones $\|\cdot\|_0$-medibles Borel es $\|\cdot\|_0$-medibles Borel, pero el resultado sigue siendo cierto si cambiamos $(E', \|.\|_o)$ por $(E',\sigma(E',E))$, según el lema anterior.

Sean

$$\Omega_n = \{t \in \Omega : f_k(t) - f(t) \in \bar{B}'(0,n) \quad \text{para todo} \quad k\}$$

entonces serán medibles y

$$\Omega = \bigcup_n \Omega_n \cup Z \qquad \text{con} \qquad \mu(Z) = 0$$

Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe Ω_{n_o} tal que $\mu(\Omega \setminus \Omega_{n_o}) < \varepsilon$ y

$$(f_k - f)(\Omega_{n_o}) \subset B'(0,n_o)$$

para todo k.

Las restricciones de la sucesión $(f_k - f)$ a Ω_{n_o} convergerá casi uniformemente a cero para la topología $(E', \|.\|_o)$, pero como $\|.\|_o$ coincide con $\sigma(E',E)$ sobre los acotados, entonces convergerá casi $\sigma(E',E)$-uniformemente. En resumen la sucesión (f_k) converge $\sigma(E',E)$-casi puntualmente en Ω.#

APENDICE

LA H-MEDIBILIDAD

Sea Ω un conjunto y Σ una σ-álgebra en Ω. Sea E un conjunto cualquiera y H una familia de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$.

Definición 1: Sea f una función de Ω en E, se dice que f es H-medible si y solamente si, para todo h de H, $h\circ f$ es medible en el sentido usual.

Definición 2: Llamaremos σ-álgebra asociada a la familia H a la mínima σ-álgebra en E engendrada por los conjuntos $h^{-1}(A)$ cuando A recorre los abiertos de $\mathbb{R}$ y h las funciones de H; la denotaremos por Σ_H.

Proposición 3 : Una función f de Ω en E es H-medible si y sólo si f es medible en el sentido clásico de (Ω,Σ) a (E,Σ_H).

DEMOSTRACION: Es inmediata. #

Sea (E,T) un espacio topológico y $H\subset C(E,\mathbb{R})$ y consideramos T_H la topología inicial de H. Sabemos que T_H es menos fina que T y que si a H le añadimos cualquier subconjunto $A\subset C((E,T_H),\mathbb{R})$ entonces $T_{H\cup A}=T_H$.

Proposición 4: Sea H un conjunto de aplicaciones de (E,T) en $\mathbb{R}$ continuas. Si en E consideramos la topología T_H, y si H es secuencialmente denso en $C(E,T_H)$ con la topología puntual, entonces : f es H-medible si y sólo si f es de Baire para (E,T_H).

DEMOSTRACION: $\Longrightarrow$ Sea $g: (E,T_H)\longrightarrow \mathbb{R}$ continua, por hipótesis existe una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ en H tal que

$$\lim_n g_n(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } E.$$

Sea f H-medible de Ω a E , entonces $g_n \cdot f$ converge puntualmente luego $g \cdot f$ es medible y por tanto medible Baire (E, T_H).

$\Leftarrow$ Es inmediato ya que $H \subset C((E,T_H),\mathbb{R})$. #

Si (E,T) es completamente regular entonces $T = T_{C(E,\mathbb{R})}$ y resulta inmediatamente la siguiente proposición:

Proposición 5 : Sea (E,T) completamente regular. Si

$$C(E, [0,1]) \subset H \subset C(E,\mathbb{R})$$

entonces f es H-medible si y sólo si f es de Baire (E,T).

DEMOSTRACION : Es inmediata. #

Proposición 6: Sea (Ω,Σ) un espacio medible, H una familia de aplicaciones de Ω a E, H_1 el subespacio lineal engendrado por H y $\overline{H}_1$ la clausura secuencial puntual de H_1.

Dada f una aplicación de Ω en E, son equivalentes:

a) f es H-medible.

b) f es H_1-medible

c) f es $\overline{H}_1$-medible.

DEMOSTRACION: a) $\Longrightarrow$ b) Sea $\sum_{k=1}^{n} a_k h_k$ una función de H_1 , donde los a_k son números reales y los h_k pertenecen a H, entonces por ser f H-medible y

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k h_k\right) f = \sum_{k=1}^{n} a_k (h_k f)$$

f es H_1-medible.

Que b) implica c) y c) implica a) son inmediatos. #

El concepto de H-medibilidad engloba casos conocidos como demostramos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1: Dado un espacio medible (Ω,Σ) y un espacio vectorial topológico E, una función $f: \Omega \longrightarrow E$ es escalarmente medible si para x' perteneciente a E' se tiene que $x' f$ es medible.

EJEMPLO 2: Dado un espacio medible (Ω,Σ) y E un espacio de Banach Masani en 26 define $M(\Sigma, B_R) = \{ f:\Omega \longrightarrow E$ tales que para todo x_o de E $||f(\cdot)- x_o||$ es medible $\}$. Por tanto $M(\Sigma,B_R)$ coincide con las funciones H-medibles, siendo

$$H = \{ \phi_{x_o} : E \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ \phi_{x_o} = ||x-x_o|| \}.$$

Proposición 7: Sea $f:\Omega \longrightarrow E$, (Ω , Σ) un espacio medible y (E,T) un espacio topológico . f es medible Borel si y sólo si f es H-medible para $H = \{X_A : A \in T\}$

DEMOSTRACION: $\Longrightarrow$ Sea f medible Borel y X_A de H. Sea B un abierto de $\mathbb{R}$, entonces

$$(X_A f)^{-1}(B) = \begin{cases} f^{-1}(E \quad A) & \text{si } 0 \in B \text{ y } 1 \notin B \\ f^{-1}(A) & \text{si } 1 \in B \text{ y } 0 \notin B \\ \emptyset & \text{si } 1 \notin B \text{ y } 0 \notin B \\ \Omega & \text{si } \{0,1\} \subset B \end{cases}$$

por tanto f es medible.

$\Longrightarrow$ Sea A abierto en E , como $f^{-1}(A)=(X_A f)^{-1}(1)$ y f es medible entonces f es H-medible.

El concepto general de medibilidad , es decir:

"Dados dos espacios medibles (Ω , Σ) y (Ω', Σ') , una función f de Ω a Ω' se dice medible si y sólo si para todo A de Σ' se tiene que $f^{-1}(A)$ está en Σ ",

es tambien una H-medibilidad. #

Teorema 8: En las condiciones anteriores, f: $(\Omega, \Sigma) \longrightarrow (\Omega', \Sigma')$, es medible si y sólo si f es H-medible para $H = \{X_{A'} : A' \in \Sigma\}$.

DEMOSTRACION : Análoga a la de la proposición 7. #

Vamos a llamar $F_H(\Omega, \Sigma)$ a las funciones H-medibles.

Proposición 9 : Si una familia H es densa en H' para la convergencia secuencial en $F(E,\mathbb{R})$ con la convergencia puntual entonces $F_H(\Omega,\Sigma) \subset F_{H'}(\Omega,\Sigma)$. Si además $H \subseteq \overline{H}_1'$ (ver proposición 6) entonces $F_H(\Omega, \Sigma) = F_{H'}(\Omega, \Sigma)$

DEMOSTRACION: Sea f de $F_H(\Omega,\Sigma)$ y h' de H', entonces existe una sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ en H tal que h_n converge puntualmente a h', y,

$$h_n \circ f(x) \longrightarrow h' \circ f(x) \quad \text{para todo } x \text{ de } \Omega .$$

Como $h_n \circ f$ es medible, entonces $h' \circ f$ es medible.

La última afirmación es inmediata. #

Proposición 10: Dada dos familias H y H' de aplicaciones sobre E, si $\Sigma_H = \Sigma_{H'}$, entonces $F_H(\Omega,\Sigma) = F_{H'}(\Omega,\Sigma)$.

DEMOSTRACION: Si f pertenece a $F_{H'}(\Omega,\Sigma) \setminus F_H(\Omega,\Sigma)$, para todo h' de H', $h' \circ f$ es medible, pero existe h de H talque $h \circ f$ no es medible. Por tanto podemos encontrar un abierto A de $\mathbb{R}$ tal que $(h \circ f)^{-1}(A)$ no pertenezca a Σ.

Entonces

$$h^{-1}(A) \notin \Sigma_{H'} \quad y \quad h^{-1}(A) \in \Sigma_H ,$$

con lo que queda demostrado que

$\Sigma_H \neq \Sigma_{H'}$ #

El recíproco de esta proposición no es cierto como demuestra el siguiente ejemplo, ahora bien si la igualdad se cumple para todos los espacios medibles, entonces se comprueba con facilidad que $\Sigma_H = \Sigma_{H'}$.

EJEMPLO 3: Sea el espacio medible $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ y $E=\mathbb{R}$. SI consideramos H como la familia de funciones características de los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$, y como H' La familia de las funciones características de los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces $F_H(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\}) = F_{H'}(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ ya que son las funciones constantes y evidentemente las σ-álgebras asociadas a dichas familias no coinciden.

Proposición 11: Sea E un conjunto, H y H' dos familias de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$. Si para todo (Ω, Σ) se cumple que $F_H(\Omega, \Sigma) = F_{H'}(\Omega, \Sigma)$ entonces $\Sigma_H = \Sigma_{H'}$.

DEMOSTRACION: Sea A perteneciente a $\Sigma_H \setminus \Sigma_{H'}$, entonces si tomamos $(\Omega, \Sigma) = (E, \Sigma_{H'})$ la función

$$I:(E,\Sigma_{H'}) \longrightarrow (E,\Sigma_{H'})$$

es medible, pero no es medible si tomamos en cambio (E,Σ_H) como espacio de llegada. Por tanto los conjuntos de aplicaciones H-medibles y H' - medibles no coinciden para todo espacio medible. #

Proposición 12: Sea E un conjunto, H y H' familias de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$. Son equivalentes:

a) $F_H(\Omega,\Sigma) = F_{H'}(\Omega,\Sigma)$ para todo espacio medible (Ω,Σ)

b) $\Sigma_{\mathcal{H}} = \Sigma_{\mathcal{H}'}$

c) $\mathcal{H}$ está contenido en el conjunto de las aplicaciones medibles de $(E,\Sigma_{\mathcal{H}'})$ a $\mathbb{R}$, y $\mathcal{H}'$ está contenido en el conjunto de las aplicaciones medibles de $(E,\Sigma_{\mathcal{H}})$ a $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACION: a) y b) son equivalentes por las proposiciones 10 y 11.

a) implica c). Si tomamos $(\Omega, \Sigma) = (E,\Sigma_{\mathcal{H}'})$, la aplicación

$$I: (E,\Sigma_{\mathcal{H}'}) \longrightarrow (E,\Sigma_{\mathcal{H}'})$$

es $\mathcal{H}'$-medible, y por tanto $\mathcal{H}$-medible, luego para toda h de $\mathcal{H}$, $h \circ I$ es medible de $(E,\Sigma_{\mathcal{H}'})$ a $\mathbb{R}$. De la misma forma, $\mathcal{H}'$ es medible de $(E,\Sigma_{\mathcal{H}})$ a $\mathbb{R}$

c) implica a). Sea f perteneciente a $F_{\mathcal{H}}(\Omega,\Sigma)$ y h' de $\mathcal{H}'$. Por hipótesis para todo abierto de $\mathbb{R}$, A, $h'^{-1}(A)$ está contenido en $\Sigma_{\mathcal{H}}$ y entonces $f^{-1}h'^{-1}(A)$ está en Σ, luego f pertenece a $F_{\mathcal{H}'}(\Omega, \Sigma)$. El razonamiento para la otra inclusión es el mismo. #

Vamos a estudiar el comportamiento de las diferentes funciones respecto a la $\mathcal{H}$- medibiolidad.

Podemos considerar en E la topología inicial para la familia y tambien la uniformidad inicial que induce en E dicha familia, es decir, la uniformidad que tiene como base

$$U_{\varepsilon}^{h_1,h_2,\dots,h_n} = \{(x,y)\in E\times E : |h_i(x)-h_i(x)| < \varepsilon \quad i=1,2,\dots,n\}$$

Observación: Llamaremos $T_{\mathcal{H}}$ a la topología inicial respecto de la familia $\mathcal{H}$. Una red converge a un punto si las imagenes de la red convergen a la imagen del punto.

Proposición 13: Si f_n es una sucesión de funciones de (Ω, Σ) a $(E,T_{\mathcal{H}})$ con la propiedad de ser $\mathcal{H}$-medibles, que converge puntualmente a una función f entonces f es $\mathcal{H}$-medible.

DEMOSTRACION: Sea h de $\mathcal{H}$, como f_n converge puntualmente a f en $T_{\mathcal{H}}$, entonces $h\circ f_n$ converge a $h\circ f$ puntualmente, luego f es $\mathcal{H}$-medible. #

Proposición 14. Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y f_n es una sucesión de funciones $\mathcal{H}$-medibles que converge en casi todo punto a una función f, entonces f es $\mathcal{H}$-medible.

DEMOSTRACION Es inmediata a partir de la proposición 13.

Proposición 15: Sea $f: (\Omega,\Sigma) \longrightarrow (E,T_{\mathcal{H}})$ el límite uniforme de una red $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de funciones $\mathcal{H}$-medibles entonces f es $\mathcal{H}$-medible.

DEMOSTRACION: Para todo $\varepsilon>0$ y para todo h de $\mathcal{H}$ existe un α_o tal que si $\alpha \geq \alpha_o$

$$|h\circ f_\alpha(t) - h\circ f(t)| \leq \varepsilon$$

Fijado h de $\mathcal{H}$ podemos extraer una sucesión convergente uniformente a h f, y por tanto asegurar la medibilidad de $h\circ f$. #

Corolario: El conjunto de las funciones $\mathcal{H}$-medibles es un cerrado para la convergencia uniforme. #

Proposición 16: Si $f:(\Omega, \Sigma, \mu) \longrightarrow (E, T_{\mathcal{H}})$ es límite casi uniforme de una red de funciones $\mathcal{H}$-medibles, entonces f es $\mathcal{H}$-medible.

DEMOSTRACION: Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red de funciones $\mathcal{H}$-medibles convergente casi uniformente a f, entonces, para todo $\varepsilon>0$, existe P_ε de Σ tal que $\mu(\Omega \setminus P_\varepsilon)<\varepsilon$ y f_α converge uniformemente a f en P_ε, esto es,

$$f|_{P_\varepsilon}:(P_\varepsilon, \Sigma_{P_\varepsilon}, \mu) \longrightarrow (E, T_{\mathcal{H}})$$

es H-medible.

Si tomamos $\varepsilon=1/n$ y $P=\bigcup P_n$, donde P_n es el conjunto medible asociado a $1/n$, tenemos que $f_{|P}$ es H-medible . Como $\mu\ (\Omega\setminus P)=0$ entonces f es medible con respecto a la familia H .#

Si E está dotado de una topología, es interesante saber cómo se conserva la H-medibilidad por el paso al límite de funciones de (Ω, Σ) a (E,T).

Proposición 17: Sea $f : (\Omega, \Sigma) \longrightarrow (E,T)$ el límite puntual de una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ H-medibles. Si $H \subset C(E,\mathbb{R})$ entonces f es medible.

DEMOSTRACION : Es inmediata. #

Proposición 18: Sea (Ω, Σ) un espacio medible y $(E,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Si la familia $H \subset C_u(E,\mathbb{R})$ (funciones uniformemente continuas de E en $\mathbb{R}$), y $f : \Omega \longrightarrow E$ es límite uniforme de una red de funciones H-medibles, entonces f es H-medible .

DEMOSTRACION: Sea $f=\lim f_\alpha$ donde (f_α) es una red de funciones H-medibles que converge uniformemente, esto es,

Para todo U de $\mathcal{U}$, existe $\alpha \geq \alpha_0$ tal que

$$(f(t), f_\alpha(t)) \in U \quad \text{para todo } t \text{ de } \Omega \ .$$

Como $h \in H$ es uniformente continua, entonces

para todo $\varepsilon>0$ existe U de $\mathcal{U}$, tal que $(x,y)\in U$ implica $| h(x)-h(y) | \leq \varepsilon$.

Si tomamos este U , existe α_0 tal que si $\varepsilon>0$

$$|h\ f(t)-h\ f_\alpha(t)| \leq \varepsilon \qquad \text{para todo } t \text{ de } \Omega \ ,$$

luego $h\circ f_\alpha$ converge uniformemente a $h\circ f$, como $h\circ f_\alpha$ es medible, $h\circ f$ es medible y f pertenece al conjunto de las funciones H-medibles.

Teorema 19: Sea E un grupo conmutativo y se H una familia de aplicaciones tales que exista una familia numerable $H' \subset H$ tal que para todo h de H , para todo abierto A de $\mathbb{R}$, y para todo x,y de E tal que $x + y \in h^{-1}(A)$, existan h_m, h_n de H', dos abiertos de $\mathbb{R}$ A_m, A_n, tales que x e y pertenezcan a $h^{-1}(A_m)$ y $h^{-1}(A_n)$ respectivamente y $h^{-1}(A_m) + h^{-1}(A_n) \quad h^{-1}(A)$. Si f y g son H-medibles, entonces f + g es H-medible.

DEMOSTRACION: Hay que probar que para todo h de H , h(f+g) es medible.

Sea A un abierto en $\mathbb{R}$

$$(f+g)^{-1}h^{-1}(A) = \bigcup_{m,n} \{ f^{-1}h_m^{-1}(A_m) \cap g^{-1}h_n^{-1}(A_n) : h_m^{-1}(A_m) + h_n^{-1}(A_n) \subset h^{-1}(A) \}$$

que es medible, y por tanto f + g es medible.

EJEMPLO 4: Sea (E,T) un grupo topológico conmutativo metrizable y separable. La medibilidad Borel cumple las condiciones del teorema anterior.

Una familia H que define la medibilidad Borel son las funciones características de los abiertos de T, pero esta familia no cumple las condiciones del teorema . Construyamos otra que dando la misma medibilidad sí las cumpla.

Como E es un espacio métrico y separable, existe una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ denso en E y una familia de entornos abiertos del elemento neutro $\mathcal{V}_E(0) = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $\{s_n + V_m\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ es base de entornos de la topología T.

Dado U de T , existe una sucesión de funciones continuas positivas h_n tales que $X_U = \lim_n h_n = \sup_n h_n$.

La H-medibilidad (medibilidad Borel) es equivalente a la H^*-medibilidad donde H^* es el conjunto de las funciones continuas de E en $\mathbb{R}$.

Tomando $H^{*\prime}$ las funciones necesarias para que toda función característica $X_{s_n + V_n}$ sea de la forma

$$X_{s_n+V_n} = \sup_{n_o,m_o} h_{n_o,m_o}$$

obtenemos una familia numerable que cumple las condiciones del teorema 19.

Sea $h \in H^*$ y A un abierto de $\mathbb{R}$, entonces $h^{-1}(A)$ es un abierto en E. Si $x+y$ pertenece a $h^{-1}(A)$, por la continuidad de la operación suma existen s_n+V_m y s_p+V_l tales que

$$x \in s_n+V_m = X^{-1}_{s_n+V_m}(0,1+\varepsilon)$$

$$y \in s_p+V_l = X^{-1}_{s_p+V_l}(0,1+\varepsilon)$$

y $(s_n+V_m) + (s_p+V_l) \subset h^{-1}(A)$,

pero por la definición de $H^{*\prime}$, existen $h^{-1}_{n_o,m_o}(0,1+\varepsilon)$ y $h^{-1}_{p_o,l_o}(0,1+\varepsilon)$ tales que

$$x \in h^{-1}_{n_o,m_o}(0,1+\varepsilon) \subset X^{-1}_{s_n+V_n}(0,1+\varepsilon)$$

$$y \in h^{-1}_{p_o,l_o}(0,1+\varepsilon) \subset X^{-1}_{s_p+V_l}(0,1+\varepsilon)$$

entonces

$$x + y \in h^{-1}(A).$$

*

TEOREMA DE EGOROV

El objeto de los siguientes resultados es comprobar que con alguna condición es posible extender el teorema de Egorov.

A partir de ahora (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita.

Proposición 20: Sea E un conjunto y H una familia de aplicaciones numerable de E en $\mathbb{R}$. Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones H-medibles de Ω a E convergente casi puntualmente a f para la topología T_H entonces f_n converge a f casi uniformemente.

DEMOSTRACION: Como ya hemos observado f es H-medible.

Sea $H = \{ h_m : m \in \mathbb{N} \}$. Fijado m, $h_m \circ f_n$ es medible, y además, converge a $h_m \circ f$ casi puntualmente. Aplicando el teroema de Egorov para el caso real podemos asegurar que para todo $\varepsilon/2^m$ existe $\Omega_{\varepsilon/2^m}$ tal que $h_m \circ f_n$ converge uniformemente a $h_m \circ f$ en $\Omega_{\varepsilon/2^m}$, y

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon/2^m}) < \varepsilon/2^m.$$

Entonces en

$$\Omega_\varepsilon = \bigcap_m \Omega_{\varepsilon/2^m}$$

la sucesión f_n converge uniformente a f cuando consideramos en E la topología T_H, y además

$$\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon . \#$$

Proposición 21: Sea E un conjunto y H una familia de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$, separable en B(E) con la topología uniforme. Entonces toda sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones de Ω en E, H-medible, casi puntualmente convergente a f, converge casi uniformemente a f.

DEMOSTRACION: Por ser H separable, existe una sucesión $(h_n)_{n=1}^{\infty}$

tal que para todo $\rho>0$ y para todo h de $\mathcal{H}$, existe h_{m_o} tal que

$$\sup_{x\in E} |h(x) - h_{m_o}(x)| < \rho/3$$

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de Ω en E $\mathcal{H}$-medibles que converge puntualmente en $(E,T_{\mathcal{H}})$ a una función f que será $\mathcal{H}$-medible.

Sea h de $\mathcal{H}$ y $\varepsilon>0$, llamemos h_{n_o} a la función de $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\sup_{x\in E} |h(x) - h_{n_o}(x)| < \varepsilon/3$$

entonces

$$| h f_n(t) - h_{n_o} f_n(t) | < \varepsilon/3 \quad \text{para todo t de } \Omega ,$$

y

$$| h f(t) - h_{n_o} f(t) | < \varepsilon/3 \quad \text{para todo t de } \Omega .$$

Si tomamos Ω_ε asociado a la sucesión $(h_{n_o} f)_{n=1}^{\infty}$ tal que converge uniformemente a $h_{n_o} f(t)$ en Ω_ε para todo k, tenemos

$$| h f_n(t) - h f(t) | < \varepsilon$$

para n suficientemente grande. ✱

Teorema 22: Sea (E,T) un espacio compacto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones reales y continuas definidas en E, tal que existe una subfamilia $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ contable que cumple :

a) $\mathcal{H}'$ separa puntos de E.

b) Dado x de E , existe h' de $\mathcal{H}'$ tal que $h'(x)\neq 0$.

Entonces dado un espacio de medida finita (Ω , Σ,μ) y una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de (Ω , Σ ,μ) a E que sean $\mathcal{H}$-medibles y convergente puntualmente a f para la topología $T_{\mathcal{H}}$ de E, dicha sucesión converge a f casi uniformemente en $(E,T_{\mathcal{H}})$.

DEMOSTRACION: Vamos a demostrar utilizando el teorema de Stone que $\mathcal{H}$ es separable con la topología uniforme en B(E).

Como (E,T) es compacto y $T_{\mathcal{H}} < T$, $(E,T_{\mathcal{H}})$ es compacto.

Sea $C(E,T_{\mathcal{H}})$ el conjunto de las funciones reales y continuas de $(E, T_{\mathcal{H}})$. Se cumple,

$$\mathcal{H} \subset C(E,T_{\mathcal{H}}) \subset C(E,T).$$

Si $\langle \mathcal{H}' \rangle$ es la menor álgebra que contiene a $\mathcal{H}'$, estará formado por funciones de la forma,

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i_1,i_2,\ldots,i_n,j}\, h_{i_1}\cdots h_{i_n}$$

con $\lambda_{i_1,i_2,\ldots i_n,j}$ un número real y $h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_n}$ funciones en $\mathcal{H}'$

Además, $\mathcal{H}'$ tiene un subconjunto $\mathcal{H}''$ numerable formado por las funciones de la forma anterior y con coeficientes racionales que es denso para la topología de la convergencia uniforme. Por el teorema de Stone-Weierstrass

$$\overline{\mathcal{H}''} = \overline{\langle \mathcal{H}' \rangle} = C(E,T_{\mathcal{H}}).$$

Finalmente, f es $\mathcal{H}''$-medible. En efecto, si h y h'son funciones de $\mathcal{H}$ entonces

$(h\cdot h')\circ f$ es medible y $(\lambda h)\circ f$ es medible.

Aplicando la proposición anterior tenemos que f_n converge a f casi uniformemente en $(E,T_{\langle \mathcal{H} \rangle})$, y tambien en $(E,T_{\mathcal{H}})$. ✱

Proposición 23: Sea E un conjunto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones de E en $\mathbb{R}$ tal que separa puntos. Entonces $(E, T_{\mathcal{H}})$ es compacto si y sólo si para toda h de $\mathcal{H}$, h(E) es compacto en $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACION: Si h pertenece a $\mathcal{H}$, entonces es continua de $(E, T_{\mathcal{H}})$ a $\mathbb{R}$, por tanto $h(E)$ es compacto en $\mathbb{R}$.

Como $\mathcal{H}$ separa puntos entonces $(E, T_{\mathcal{H}})$ se puede sumergir en $\prod_{h\in\mathcal{H}} \mathbb{R}_h$ donde $\mathbb{R}_h = \mathbb{R}$, mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (E,T_{\mathcal{H}}) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \prod_h \mathbb{R}_h \\ x & \longrightarrow & (h(x))_h \end{array}$$

siendo $\mathcal{H}$ un homeomorfismo de E en $\mathcal{H}(E)$, luego $\mathcal{H}(E)$ es cerrado en $\prod_h h(E)$ compacto, luego es compacto. Por tanto $(E, T_{\mathcal{H}})$ es compacto. #

Proposición 24: Sea E un conjunto y $\mathcal{H}$ una familia de funciones de E en $\mathbb{R}$ tal que $h(E)$ es un compacto en $\mathbb{R}$ para toda h de $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ tiene una subfamilia $\mathcal{H}'$ numerable que cumple:

a) $\mathcal{H}'$ separa puntos de E.

b) Dado x de E existe h de $\mathcal{H}'$ tal que $h(x)\neq 0$.

Entonces, $(E,T_{\mathcal{H}})$ es compacto y dada un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ) y una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de Ω a E $\mathcal{H}$-mediblestal que converge casi puntualmente a una función f de Ω en E, entonces f_n converge a f casi uniformemente.

DEMOSTRACION: Es consecuencia del teorema 22 y de la proposición 23. #

BIBLIOGRAFIA

1. BAUER, H. (1968) PROBABILITY THEORY AND ELEMENTS OF MAESURE THEORY Holt Rinehart and Wiston Inc..

2. BOMBAL, F. (1978). EL TEOREMA DE RADON NIKODYM EN ESPACIOS DE BANACH. Depart. Teoría de Funciones Univ. Complutense Madrid.

3. CHI.G.Y. (1975) ON THE RADON NIKODYM THEOREM IN LOCALLY CONVEX SPACES. Lectures Notes 541 (199-209).

4. CHRISTENSEN J. (1974) TOPOLOGY AND BOREL STRUCTURE. North-Holland

5. DAY,M. (1958) NORMED LINEAR SPACES. Springer-Verlag.

6. DIESTEL, J.and UHL, J.(1977) VECTOR MEASURES. Math. Surveys 15

7. DUGUNDJI,J.(1966) TOPOLOGY. Allyn and Bacon Inc.Boston.

8. DUNFORD,N and SCHWARTZ, J (1967) LINEAR OPERATORS. Intescience Publishers Inc. New York.

9. EDGAR,G.A. (1977) MEASURABILITY IN A BANACH SPACES I. Indiana Univ. Math. journal 26 (603-677).

9 bis. EDGAR , GA. (1979) MEASURABILITY IN A BANACH SPACE II. Indiana Univ Math. Journal 28 (559-579)

10. FERNANDEZ-ASENJO(1977) INTEGRACION EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS. Revista Hispano Americana 5.6.

11. GILLIAM,D. (1977) ON INTEGRATION AND THE RADON NIKODYM THEOREM IN QUASICOMPLETE LOCALLY CONVEX TOPOLOGICAL VECTOR SPACES. J. Reine Amgew Math. 292 (125-137).

12. GUZMAN, M. INTEGRACION:TEORIA Y TECNICAS. Ed Alhambra.

13. HALMOS P. (1950) MEASURE THEORY Van NOstrand.

14. HANSELL, R.W. (1974) ON BOREL MAPPINGS AND BAIRE FUNCTIONS. Trans Amer. Math. Soc. 194 (195-211).

15. HANSELL, R.W. (1971) BOREL MEASURABLES MAPPINGS FOR NONSEPARABLES METRIC SPACES. Trans, Amer. Math. Soc. 161. (144-169).

16 HEWITT,R. (1970) ABSTRACT HARMONIC ANALISYS I y II. Springer-Verlag.

17.HORVATH,J. (1966) TOPOLOGICAL VECTOR SPACES AND DISTRIBUTIONS. Addison-Wesley.

18. KELLEY, J.(1955) GENERAL TOPOLOGY. Van Nostrand.

19. KOTHE,G. (1969) TOPOLOGICAL VECTOR SPACES. Springer- Verlag.

20. KURATOWSKI, K (1968) TOPOLOGY I y II. Acad. Press.

21. KURATOWSKI MOSTOWSKI (1968) SET THEORY. Nort-Holland.

22. LARDSEN (1973) FUNTIONAL ANALYSIS. Marcel Dekker Inc. New York

23. LEVY, A. (1979) BASIC SET THEORY. Springer Verlag.

24. LINDESTRAUSS, J and TZAFIRI,L.(1979) CLASICAL BANACH SPACES Springer Verlag.

25. MARCZEWSKI, E and SIKORSKI,R. (1948) MEASURES ON NONSEPARABLES METRIC SPACES. Colloq. Math. 1.

26. MASANI, P.R. (1975) INTEGRATION ON HILBERT SPACES. Lectures NOtes 541 (69- 106).

27. MUNROE,H.(1958) INTRODUCTION TO MEASURE AND INTEGRATION. Addison Wesley.

28. NEDOMA, J. (1956). NOTE ON GENERALIZED RADON VARIABLES. First Conference on Information Theory of Prage.

29. PREISS,D.(1975) COMPLETELY ADDITIVE DISJOINT SYSTEM OF BAIRE SET IS OF BOUNDED CLASS. Comm. Math.Univ. Carolinae.

30.ROBERTSON, A.and ROBERTSON,W. (1973) TOPOLOGICAL VECTOR SPACES. Academic Cambridge Press.

31. RODRIGUEZ-SALINAS, B.(1979) INTEGRACION DE FUNCIONES CON VALORES EN UN ESPACIO LOCÁLMENTE CONVEXO. Real Acad. Ciencias de Madrid.

32. RODRIGUEZ-SALINAS y JIMENEZ GUERRA. (1977) MEDIDAS DE RADON DE TIPO H. R. Acad. Ciencias de Madrid.

33. ROYDEN,P 1963) REAL ANALYSIS. Macmillan.

34. RUDIN,J.(1970) REAL AND COMPLEX ANALYSIS. Mcgraw-Hill.

35. SCHAEFER, (1966) TOPOLOGICAL VECTOR SPACES. Springer Verlag.

36. STEGALL, J (1975) THE RADON NIKODYM PROPIETY IN CONJUGATE BANACH SPACES. Trans. of the Math. Amer. Soc. 208.

37. SCHWART , L.(1973) RADON MEASURES. Oxford University Press.

38. STONE, A. H. (1973) SOME PROBLEMS OF MEASURABILITY. Lect. Notes 375. (222-228)

39. STONE, A.H. (1975) TOPOLOGY AND MEASURE. Lect. Notes 541. (43--44).

40. TREVES, F. (1967). TOPOLOGICAL VECTOR SPACES , DISTRIBUTIONS AND KERNELS. Acad. Press.

41. ULAM (1930) ZUR MASSTHEORIE IN DER ALLGEMEINE MENGENLEHRE. Fund. Math. 16.

42 VARADARAJAN, V, (1965) MEASURES ON TOPOLOGICAL SPACES. Amer. Mat. Soc. Translations.48.

43. WESTON, J. A COUNTER EXEMPLE CONCERNING EGOROFF'S THEOREM Journal London Math Soc. 34. (139-140).